جامعة عين شمس
كلية التجارة

التحليل الاحصائى

تأليف

د. نور الدين رمضان د.عصام فوزى

مراجعة

ا.د. عمرو الاتربى

قسم الاحصاء والرياضة والتأمين

كلية التجارة ـ جامعة عين شمس

مقدمة

يقدم هذا الكتاب شرحا وافيا لبعض اساليب التحليل الاحصائى الأكثر استخداما فى المجالات التجارية وكذلك بعض مجالات التطبيق للاساليب الاحصائية المختلفة .

يبدأ الكتاب بالباب الأول : الارتباط .

ثم الباب الثانى :الانحدار المتعدد .

ثم الباب الثالث :توزيع (ف) و تحليل التباين .

ثم الباب الرابع :النماذج الاحصائية .

واخيرا الباب الخامس : تحليل السلاسل الزمنية .

وقد راعينا فى هذا الكتاب عرض الموضوعات بأسلوب ميسر واضح مع اعطاء الامثلة المختلفة .

ونأمل أن يفى الكتاب بصورته الحالية بالهدف الذى كتب من أجله .

المؤلفان

الفهرس

الباب الاول

"الارتباط"

CORRELATION

يعبر الارتباط عن قوة واتجاه العلاقة بين متغيرين، (أو أكثر).

ومعامل الارتباط تتراوح قيمته بين {+١، −١} فإذا كانت قيمة معامل الارتباط (+١) يقال أن الارتباط طردى تام وإذا كانت قيمته (−١) يقال أن الارتباط عكسى تام وإذا كانت قيمته = صفرا فإنه فى هذه الحالة لا يوجد ارتباطاً أو علاقة بين المتغيرين وهذه الحالات الثلاثة السابقة نادرة الحدوث فى الحياة الاقتصادية وذلك لطبيعة المتغيرات الاقتصادية وتشابهها وارتباطها ببعضها بدرجات متفاوته، والحالات الغالبة فى المشاكل الاقتصادية هى أن يكون معامل الارتباط كسر موجب أو كسر سالب، فإذا كانت قيمة الكسر موجبة فأن الارتباط يكون طرديا وكلما اقتربت قيمة معامل الارتباط من الواحد الصحيح دل ذلك على قوة العلاقة وبالعكس إذا كانت قيمة معامل الارتباط كسراً سالباً دل ذلك على أن العلاقة عكسية وكلما اقتربت قيمة هذا المعامل من (−١) دل ذلك على قوة العلاقة العكسية وسيتم تناول الموضوعات الآتية :

١- معامل ارتباط بيرسون البسيط.
٢- معامل ارتباط بيرسون من جدول مزدوج لبيانات مبربة.
٣- معامل ارتباط سبيرمان للرتب.
٤- معامل الاقتران.
٥- معامل التوافق.
٦- معامل الارتباط المتعدد من معاملات الارتباط البسيطة
٧- معامل الارتباط الجزئى.

١- معامل ارتباط بيرسون البسيط
لبيانات غير مبوبة
Pearson's Correlation coefficient

يوضح هذا المعامل قوة واتجاه العلاقة الخطية بين متغيرين إحداهما مستقل (س) والأخر تابع (ص) لعينة عشوائية مسحوبة من مجتمع بياناته موزعة توزيعا طبيعيا ويمكن أن يعبر عنه بالعلاقة الآتية :

$$ر_{س،ص} = \frac{تغ_{س،ص}}{\sqrt{تباين_{(س)}}\ \sqrt{تباين_{(ص)}}} \qquad (١)$$

حيث أن :

$ر_{س،ص}$: معامل الارتباط البسيط بين المتغيرين س،ص.

$تغ_{س،ص}$: تغاير س،ص

$$= \frac{مجـ (س - \bar{س})\ (ص - \bar{ص})}{ن}$$

$تباين_{س}$: هو مربع الانحراف المعياري للمتغير (س)

$$= \frac{مجـ (س - \bar{س})^{٢}}{ن}$$

$تباين_{ص}$: هو مربع الانحراف المعياري للمتغير (ص).

$$\frac{مجـ (ص - \bar{ص})^{٢}}{ن}$$

$\bar{\text{س}}$ = الوسط الحسابى للمتغير (س) = $\dfrac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$

$\bar{\text{ص}}$ = الوسط الحسابى للمتغير (ص) = $\dfrac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$

ن : حجم العينة

وعليه يمكن إعادة كتابة الصيغة (١) السابقة كالآتى :

$$\text{ر}_{\text{س ص}} = \frac{\text{مجـ}(\text{س}-\bar{\text{س}})\text{٢}(\text{ص}-\bar{\text{ص}})}{\text{ن}\sqrt{\dfrac{\text{مجـ}(\text{س}-\bar{\text{س}})^{\text{٢}}}{\text{ن}}}\sqrt{\dfrac{\text{مجـ}(\text{ص}-\bar{\text{ص}})^{\text{٢}}}{\text{ن}}}}$$

$$\boxed{\frac{\text{مجـ}(\text{س}-\bar{\text{س}})(\text{ص}-\bar{\text{ص}})}{\sqrt{\text{مجـ}(\text{س}-\bar{\text{س}})^{\text{٢}}}\sqrt{\text{مجـ}(\text{ص}-\bar{\text{ص}})^{\text{٢}}}}} \qquad (\text{٢})$$

وحيث أنه فى كثير من الحالات تكون قيمة الأوساط الحسابية ($\bar{\text{س}}$ أو $\bar{\text{ص}}$) أو كلاهما ليست أعدادا صحيحة، فى هذه الحالة يكون بسط العلاقة (٢) السابقة هو :

$$= \text{مجـ}(\text{س}-\bar{\text{س}})(\text{ص}-\bar{\text{ص}})$$

$$= \text{مجـ}\{\text{س ص}-\bar{\text{س}}\,\text{ص}-\text{س}\,\bar{\text{ص}}+\bar{\text{س}}\,\bar{\text{ص}}\}$$

$$= \text{مجـ س ص}-\bar{\text{س}}\,\text{مجـ ص}-\bar{\text{ص}}\,\text{مجـ س}+\text{ن}\,\bar{\text{س}}\,\bar{\text{ص}}$$

$$= \text{مجـ س ص}-\left|\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right|(\text{مجـ ص})-\left|\frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}\right|(\text{مجـ س})+\text{ن}\left|\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right|\left|\frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}\right|$$

$$= \text{مجـ س ص}-\text{٢}\,\frac{\text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن}}+\frac{\text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن}}$$

$$= \text{مجـ س ص} - \frac{\text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن}} \longleftarrow (\text{أ})$$

ويكون مقام العلاقة (٢) السابقة هو :

$$\text{مجـ} (\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}$$

$$= \text{مجـ} \{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} \bar{\text{س}} + \bar{\text{س}}^{٢}\}$$

$$= \text{مجـ س}^{٢} - ٢\bar{\text{س}} \text{ مجـ س} + \text{ن} \bar{\text{س}}^{٢}$$

$$= \text{مجـ س}^{٢} - ٢ \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} (\text{مجـ س}) + \text{ن} \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^{٢}$$

$$= \text{مجـ س}^{٢} - ٢ \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}} + \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}}$$

$$= \text{مجـ س}^{٢} - \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}} \longleftarrow (\text{ب})$$

وبنفس الطريقة السابقة يمكن إثبات أن :

$$\text{مجـ} (\text{ص} - \bar{\text{ص}})^{٢} = \text{مجـ ص}^{٢} - \frac{(\text{مجـ ص})^{٢}}{\text{ن}} \longleftarrow (\text{جـ})$$

ومن العلاقات (أ)، (ب)، (جـ) السابقة يمكن إعادة كتابة العلاقة (٢) السابقة كالآتى :

$$\text{ر}_{\text{س ص}} = \frac{\text{مجـ س ص} - \frac{\text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن}}}{\sqrt{\text{مجـ س}^{٢} - \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}}} \sqrt{\text{مجـ ص}^{٢} - \frac{(\text{مجـ ص})^{٢}}{\text{ن}}}} \longleftarrow (٣)$$

وزيادة فى التبسيط إذا تم ضرب البسط والمقام فى العلاقة (٣) السابقة فإنه ينتج الآتى :

$$\boxed{\text{ر}_{\text{س ص}} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\sqrt{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}} \sqrt{\text{ن مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}}}} \longleftarrow (٤)$$

لاختبار جوهرية معامل ارتباط بيرسون البسيط:

١- الفرض الأصلى أو فرض العدم : معامل الارتباط لا يختلف جوهريا عن الصفر.

٢- الفرض البديل : معامل الارتباط يختلف جوهريا عن الصفر.

٣- مستوى المعنوية α = ٥%.

٤- المقياس الاحصائى المناسب : توزيع (ت)

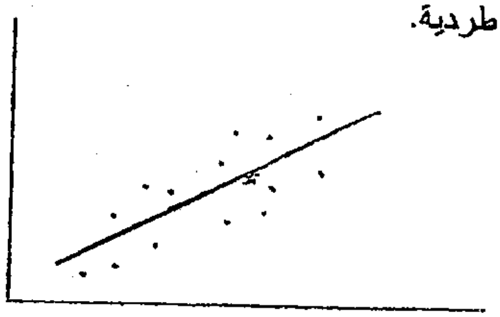
$$ت^* = \left| \frac{ر\sqrt{ن - ٢}}{\sqrt{١ - ر^٢}} \right|$$

٥- إجراء العمليات الحسابية

٦- القـــرار.

إذا كانت قيمة ت* > ت النظرية بدرجات حرية (ن-٢) وعند مستوى المعنوية المفترض.

فإن ذلك يدل على وجود علاقة جوهرية بين س، ص والعكس صحيح ويلاحظ أن شكل الانتشار يمكن أن يعطى فكرة مبدئية عن شكل واتجاه العلاقة بين المتغيرين س، ص فإذا كان شكل الانتشار يشبه الشكل (١) التالى دل ذلك على وجود علاقة طردية.

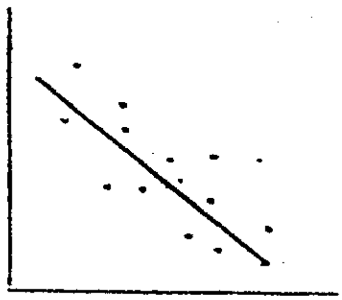


الشكل (١)

علاقة خطية طردية

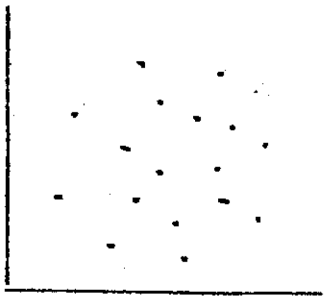
وكلما اقتربت النقط من بعضها دل ذلك علـى قـوة العلاقـة الطرديـة والعكس صحيح أما الشكل رقم (٢) التالى فيشير أن العلاقـة يمكـن أن تكـون عكسية.

والشكل رقم (٣) التالى يشير أنه لا توجد علاقة أو أن العلاقة ضعيفـة جدا.



الشكل (٢)

العلاقة عكسية



الشكل (٣)

العلاقة ضعيفة جدا

أو لا توجد علاقة

مثال (١) الأتى يمثل بيانات عينة عشوائية من (١٠) أفراد.

الدخل	١٥	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	١٢	١٤	٨٠ =
الاستهلاك	٨	٦	٦	٥	٨	٧	٥	٦	٩	١٠	٧٠ =

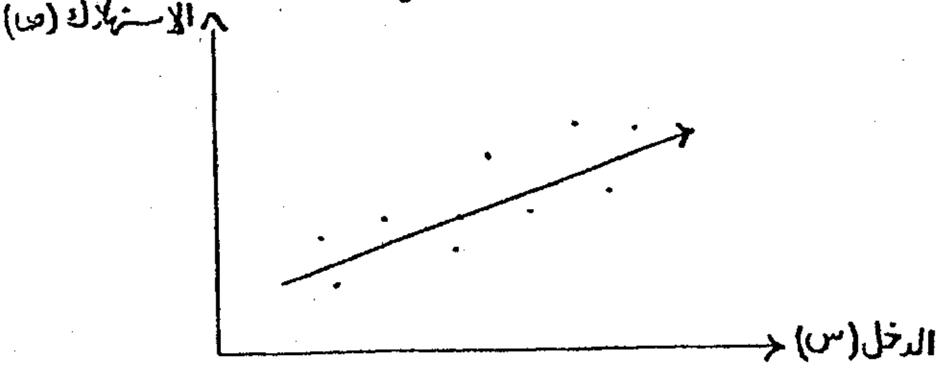
المطلوب :

١- ارسم شكل الانتشار ومنه تبين نوع العلاقة.

٢- أوجد معامل الارتباط البسيط لبيرسون.

الحـــل :

شكل الانتشار



شكل الانتشار السابق يشير إلى أن هناك علاقة خطية طردية بين الدخـل والاستهلاك.

<u>لإيجاد معامل الارتباط :</u>

الوسط الحسابى لـــ س

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{\text{٩٠}}{\text{١٠}} = \text{٩}$$

$$\bar{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} = \frac{\text{٧٠}}{\text{١٠}} = \text{٧}$$

وحيث أن كل من س-، ص- أعدادا صحيحة فنى هذه الحالـــة يمكـــن استخدام الصيغة رقم (٢) السابقة لحساب معامل الارتباط كالأتى :

$$\text{ر}_{\text{س ص}} = \frac{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})(\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\sqrt{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^2}\ \sqrt{\text{مجـ}(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2}} \qquad (\text{٢})$$

ويمكن إيجاد المجاميع السابقة عن طريق عمل الجدول الآتي :

س	ص	س-س̄	ص-ص̄	(س-س̄) (ص-ص̄)	(س-س̄)٢	(ص-ص̄)٢
١٥	٨	٦	١	٦	٣٦	١
١٠	٦	١	-١	-١	١	١
٩	٦	صفر	-١	٠	٠	١
٨	٥	-١	-٢	٢	١	٤
٧	٨	-٢	١	-٢	٤	١
٦	٧	-٣	٠	٠	٩	٠
٥	٥	-٤	-٢	٨	١٦	٤
٤	٦	-٥	-١	٥	٢٥	١
١٢	٩	٣	٢	٦	٩	٤
١٤	١٠	٥	٣	١٥	٢٥	٩
٩٠	٧٠	٠	٠	٣٩	١٢٦	٢٦

وبالتعويض في العلاقة (٢) السابقة :

$$\text{ر}_{\text{س ص}} = \frac{٣٩}{\sqrt{١٢٦}\ \sqrt{٢٦}}$$

$$= \frac{٣٩}{\sqrt{٣٢٧٦}} = \frac{٣٩}{٥٧,٢٣٦} = ٠,٦٨١$$

∴ هناك علاقة طردية بين الدخل والاستهلاك.

المطلوب الثالث : اختبار جوهرية معامل الارتباط :

١- الفرض الأصلي أو فرض العدم : لا توجد علاقة جوهرية.

٢- الفرض البديل : توجد علاقة جوهرية.

٣- مستوى المعنوية α = ٥%.

٤- المقياس المناسب : توزيع (ت).

$$\text{ت} = \left| \frac{\text{ر}\sqrt{\text{ن} - ٢}}{\sqrt{١ - \text{ر}^{٢}}} \right|$$

٥- العمليات الحسابية

$$\text{ت}^{*} = \left| \frac{.٦٨١ \sqrt{\text{ن} - ٢}}{\sqrt{١ - (.٦٨١)^{٢}}} \right| = \left| \frac{.٦٨١ \sqrt{٨}}{\sqrt{١ - .٤٦٤}} \right|$$

$$= \left| \frac{.٦٨١ \times ٢.٨٢٨}{\sqrt{.٥٣٦}} \right| = \left| \frac{١.٩٢}{.٧٣٢} = ٢.٦٣١ \right|$$

يلاحظ أن قيمة (ت) النظرية عند مستوى معنوية α = ٥%. وبدرجات حرية = (ن-٢) = ٢.٣٠٦.

٥- القـــرار :

حيث أن ت* > ت النظرية

∴ معامل الارتباط جوهري أو معنوي ولا يرجع إلى الصدفـــة وذلـك بمستوى معنوية α = ٥%.

مثال (٢) :

الآتي يمثل عينة عشوائية اختيرت من (٨) مدن مختلفة لقياس العلاقــــة بين سعر سلعة استهلاكية بالجنيهات والكمية المباعة منها بالألف طن.

السعر س	٧	٩	٦	٨	٥	٨	١٠	٩	= ٦٢
الكمية ص	٩	٧	١٠	٨	١٢	٧	٦	٧	= ٦٦

والمطلوب : حدد نوع وقوة العلاقة بين السعر والكمية المباعة واختــبر جوهريتها عند مستوى معنوية α = ٥%.

إذا علمت أن قيمة ت النظرية بدرجات حرية (٦) = ٢,٤٤٧.

الحـــل :

$$\bar{\text{س}} = \frac{٦٥}{٨} = ٧,٧٥$$

$$\bar{\text{ص}} = \frac{٦٥}{٨} = ٨,٢٥$$

وحيث أن $\bar{\text{س}}$ و $\bar{\text{ص}}$ أعدادا كسرية ففي هذه الحالــة يمكــن اســتخدام الصيغة رقم (٤) السابقة لإيجاد معامل الارتباط :

$$\text{ر}_{\text{س ص}} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\sqrt{\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2}\ \sqrt{\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2}} \longrightarrow (٤)$$

ويمكن إيجاد المجاميع السابقة عن طريق عمل جدول كالآتي :

س	ص	س ص	س٢	ص٢
٧	٩	٦٣	٤٩	٨١
٩	٧	٦٣	٨١	٤٩
٦	١٠	٦٠	٣٦	١٠٠
٨	٨	٦٤	٦٤	٦٤
٥	١٢	٦٠	٢٥	١٤٤
٨	٧	٥٦	٦٤	٤٩
١٠	٦	٦٠	١٠٠	٣٦
٩	٧	٦٣	٨١	٤٩
٦٢	٦٦	٤٨٩	٥٠٠	٥٧٢

وبالتعويض فى العلاقة (٤) السابقة مع ملاحظة أن (ن) = ٨ ينتج الأتى:

$$ر_{\text{س ص}} = \frac{٨\,(٤٨٩) - (٦٢)\,(٦٦)}{\sqrt{٨\,(٥٠٠) - (٦٢)^{٢}}\;\sqrt{٨\,(٥٧٢) - (٦٦)^{٢}}}$$

$$= \frac{٣٩١٢ - ٤٠٩٢}{\sqrt{٤٠٠٠ - ٣٨٤٤}\;\sqrt{٤٥٧٦ - ٤٣٥٦}} = \frac{-١٨٠}{\sqrt{١٥٦}\;\sqrt{٢٢٠}}$$

$$\frac{-١٨٠}{\sqrt{٣٤٣٢٠}} = \frac{-١٨٠}{١٨٥,٢٥٧} = -\,٫٩٧٢$$

∴ هناك علاقة عكسية قوية

أختبار جوهرية العلاقة :

١- فرض العدم : لا توجد علاقة جوهرية بين المتغيرين.

٢- الفرض البديل : توجد علاقة جوهرية بين المتغيرين.

٣- مستوى المعنوية α = ٥%.

٤- المقياس المناسب : توزيع ت

$$\text{ت} = \left| \frac{\text{ر}\sqrt{\text{ن} - ٢}}{\sqrt{١ - \text{ر}^{٢}}} \right|$$

٥- العلاقات الحسابية :

$$\text{ت} = \left| \frac{-,٩٧٢\sqrt{٨-٢}}{\sqrt{١-(-,٩٧٢)^{٢}}} \right| = \left| \frac{-,٩٧٢\sqrt{٦}}{\sqrt{١-,٩٤٥}} \right|$$

$$= \left| \frac{-,٩٧٢ \times ٢,٤٥}{\sqrt{,٠٥٥}} \right| = \left| \frac{-٢,٣٨١}{,٢٣٥} \right| = ١٠,١٣٤$$

٥- القـــرار

حيث أن ت > ت النظرية.

$\therefore$ علاقة الارتباط العكسية السابقة جوهرية ولا ترجع للصدفة بمســتوى معنوية α = ٥%.

٢- معامل ارتباط بيرسون من جدول مزدوج
(لبيانات مبوبة)

إذا كان الغرض هو معرفة قوة واتجاه العلاقة بين متغيرين وكان حجـــم العينة العشوائية المختارة كبير نسبيا فيمكن وضع بيانات العينة فى صورة فئـــات وتكرارات أو تبويبها فى جدول توزيع تكرارى مزدوج.

ويمكن إيجاد معامل الارتباط فى هذه الحالة باستخدام العلاقة الآتية :

$$\text{ر}_{\text{س ص}} = \frac{\text{مجـ (ك ح}_{\text{س}}\text{ ح}_{\text{ص}}\text{) - (مجـ ك) (ح}'_{\text{س}}\text{) (ح}'_{\text{ص}}\text{)}}{\text{مجـ ك (ع}_{\text{س}}\text{) (ع}_{\text{ص}}\text{)}} \qquad (٦)$$

ويمكن اتباع الخطوات الآتية :

أولاً: عمل جدول بسيط لـــ س كالآتى :

$\text{ف}_{\text{س}}$	ك	س	$\text{ح}_{\text{س}}$	$\text{ح}_{\text{س}}\text{ك}$	$\text{ح}^{٢}_{\text{س}}\text{ك}$

واستخـــــراج

$$(١)\quad \text{ح}'_{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ح}_{\text{س}}\text{ك}}{\text{مجـ ك}}$$

(٢) الانحراف المعيارى ل (س)

$$\text{ع}_{\text{س}} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ح}'^{2}_{\text{س}}\text{ك}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ح}'_{\text{س}}\text{ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^{2}}$$

ثانيا: عمل جدول بسيط للمتغير (ص) كالأتى :

$\text{ف}_{\text{ص}}$	ك	س	$\text{ح}_{\text{ص}}$	$\text{ح}_{\text{ص}}\text{ك}$	$\text{ح}^{2}_{\text{ص}}\text{ك}$

استخـــــراج

(١) $\text{ح}'_{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ح}_{\text{ص}}\text{ك}}{\text{مجـ ك}}$

(٢) الانحراف المعيارى ل (ص)

$$\text{ع}_{\text{ص}} = \sqrt{\frac{\text{ح}^{2}_{\text{ص}}\text{ق}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ح}_{\text{ص}}\text{ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^{2}}$$

ثالثا: عمل جدول مزدوج للمتغير (س، ص) معا واستخراج مجـ ك ح س ح س

مثال (٣) :

اختيرت عينة عشوائية من ١٠٠ طالب من طلبة كلية التجارة جامعة عين شمس لمعرفة العلاقة بين طول الطلبة وأوزانهم ووضعت البيانات في الجدول الآتى :

الوزن (ص) / الطول (س)	٥٠ -	٦٠ -	٧٠ -	٨٠-٩٠	المجموع
١٥٢ -	٧	٥			١٢
١٥٨ -	٤	١٥	١٢		٣١
١٦٤ -		٩	١٥		٢٤
١٧٠ -		٨	١٢	٨	٢٨
١٧٦-١٨٢				٥	٥
المجموع	١١	٣٧	٣٩	١٣	١٠٠

والمطلوب : معرفة ما إذا كان هناك علاقة جوهرية بين الطول والتوزن وذلك بمستوى معنوية α = ٥%. إذا علمت أن قيمة ت النظرية بدرجات حرية (٩٨) = ١,٩٨.

الحـــل :

يلاحظ أن حجم العينة أو مجـ ك = ١٠٠

أولاً: عمل جدول بسيط للمتغير (س) كالآتى :

ف س	ك	س	ح س	ح س ك	ح² س ك
١٥٢-	١٢	$\frac{١٥٨+١٥٢}{٢}$ = ١٥٥	٦-	٧٢-	٤٣٢
١٥٨-	٣١	$\frac{١٦٤+١٥٨}{٢}$ = ١٦١ أ	٠	٠	٠
١٦٤-	٢٤	$\frac{١٧٠+١٦٤}{٢}$ = ١٦٧	٦	١٤٤	٨٦٤
١٧٠-	٢٨	$\frac{١٧٦+١٧٠}{٢}$ = ١٧٣	١٢	٣٣٦	٤٣٩٢
١٨٢-١٧٦	٥	$\frac{١٨٢+١٧٦}{٢}$ = ١٧٩	١٨	٦٠	١٦٢٠
	١٠٠			٤٩٨	٧٣٠٨

(١) $\bar{ح}_س = \frac{٤٩٨}{١٠٠} = ٤,٩٨$

(٢) الانحراف المعيارى لـــ (س)

$$ع_س = \sqrt{\frac{مجـ\ ح^2 ك_س}{مجـ\ ك} - \left(\frac{مجـ\ ح_س ك}{مجـ\ ك}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{٧٣٠٨}{١٠٠} - \left(\frac{٤٩٨}{١٠٠}\right)^2}$$

$$= \sqrt{٧٣,٠٨ - ٢٤,٨}$$

$$= \sqrt{\text{٤٨,٢٨}}$$

$$= \text{٦,٩٥}$$

ثالثاً: عمل جدول بسط للمتغير (ص)

فئات ص ف ص	تكرارات (ص) ك	مراكز الفئات ص	ص-أ ح ص	ح ص ك	ح^{2} ص ك
٥٠ -	١١	$\frac{\text{٦٠+٥٠}}{\text{٢}}$ = ٥٥	٢٠ -	٢٢٠ -	٤٤٠٠
٦٠ -	٣٧	$\frac{\text{٧٠+٦٠}}{\text{٢}}$ = ٦٥	١٠-	٣٧٠-	٣٧٠٠
٧٠ -	٣٩	٧٥ أ	٠	٠	٠
٨٠ - ٩٠	١٣	٨٥	١٠	١٣٠	١٣٠٠
مجـ	١٠٠			٤٦٠-	٩٤٠٠

$$\text{ح}'_{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ح ص ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{\text{٤٦٠ -}}{\text{١٠٠}} = \text{٤,٦}$$

$$\text{ع}_{\text{ص}} = \sqrt{\frac{\text{٩٤٠٠}}{\text{١٠٠}} - \left(\frac{\text{٤٦٠}}{\text{١٠٠}}\right)^{\text{٢}}} = \sqrt{\text{٩٤ - ٢١,١٦}}$$

$$= \text{٨,٥٣٥}$$

ثالثا: عمل جدول مزدوج للمتغيرين س ، ص

ح س	ص / س	٥٠ -	٦٠ -	٧٠ -	٨٠-٩٠	مجـ
	ح ص	-٢٠	-١٠	٠	١٠	
-٦	١٥٢ -	٧ [٨٤٠]	٥ [٣٠٠]	١٢		١١٤٠
	١٥٨ -	٤ [٠]	١٥ [٠]	١٢ [٠]		٠
٦	١٦٤ -		٩ [-٥٤٠]	١٥ [٠]		-٥٤٠
١٢	١٧٠ -		٨ [-٩٦٠]	١٢ [٠]	٨ [٩٦٠]	٠
١٨	١٧٦-١٨٢				٥ [٩٠٠]	٩٠٠
	مجـ	٨٤٠	-١٢٠٠	٠	١٨٦٠	١٥٠٠

(مجـ (ك حر حص))

يلاحظ أن الأرقام داخل المربعات الصغيرة ناتجة عن حاصل ضرب التكرار (ك) × ح س المناظرة × ح ص المناظرة.

فمثلاً الرقم ٨٤٠ ⟸ ٧ × -٦ × -٢٠

٣٠٠ ⟸ ٥ × -٦ × -١٠

... وهكذا؛؛؛

معامل الارتباط :

$$\text{ر}_{\text{س ص}} = \frac{\text{مجـ (ك ح س ح ص) - (مجـ ك) (ح}'\text{س) (ح}'\text{ص)}}{\text{مجـ ك (ع س) (ع ص)}}$$

$$= \frac{١٥٠٠٠ - ١٠٠\text{ت} \times ٤,٩٨ \times ٤,٦٠٠}{١٠٠ \times ٦,٩٥ \times ٨,٥٣٥}$$

$$= \frac{١٥٠٠٠ - ٢٢٩٠,٨}{٥٩٣١,٨٢٥} = \frac{٣٧٩٠,٨}{٥٩٣١,٨٢٥} = ,٦٣٩$$

∴ هناك علاقة طردية بين الطول والوزن.

اختبار جوهرية العلاقة :

١- فرض العدم : لا توجد علاقة جوهرية بين الطول والوزن.

٢- الفرض البديل : توجد علاقة جوهرية بين الطول والوزن.

٣- مستوى المعنوية α = ٥%.

٤- المقياس المناسب : توزيع (ت)

$$\text{ت}^{*} = \left| \frac{\text{ر} \sqrt{\text{ن} - ٢}}{\sqrt{١ - \text{ر}^{٢}}} \right|$$

٥- العمليات الحسابية

$$= \left| \frac{,٦٣٩ \sqrt{٩٨}}{\sqrt{١ - (,٦٣٩)^{٢}}} \right| = ٩,٣١٦$$

٥- القـــــرار

حيث أن ت* > ت النظرية

∴ العلاقة جوهرية بمستوى معنوية α = ٥%.

٣- معامل ارتباط سبيرمان للرتب

Spearman Rank Correlation Coefficient

يندرج معامل ارتباط سبيرمان للرتب ضمن الإحصاءات الــلا معلميــه Non- Prametric Statistics والتى لا يشترط فيها أن يكون المجتمع موزعــاً توزيعا طبيعيا كما هو الحال بالنسبة لمعامل ارتباط بيرسون.

ويفضل استخدام معامل ارتباط سبيرمان فى إيجادة قوة واتجاه العلاقــــة بين متغيرين غير رقميين كما هو الحال فى تقديرات الطلبة (جيد، جيــــد جــداً، ممتاز..) أو إذا كانت البيانات فى صورة معدلات أو نسب مئوية أو مرتبة طبقــاً لنظام معين مثل رأى خبير رياضى فى ترتيب مجموعة من اللاعبين.

ويمكن اتباع الخطوات الآتية :

(١) عمل جدول كالآتى :

المتغير الأول	المتغير الثانى	الترتيب التنازلى للمتغير الأول	الترتيب التنازلى للمتغير الثانى	فروق الرتب (ف)	مربع فروق الرتب ف٢

(٢) معامل ارتباط سبيرمان للرتب :

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^{٢}}{ن(ن^{٢}-١)}$$

حيث أن مجــ ف٢ : هى مجموع مربعات فروق الرتب :

ن : حجم العينة.

(٣) اختبار معنوية معامل ارتباط سبيرمان للرتب :

إذا كانت قيمة معامل الارتباط المحسوبة ≤ القيمة النظرية الموجودة في الجدول فأن هذا يعني وجود علاقة جوهرية بين المتغيرين والعكس صحيح ويلاحظ أن الاختبار السابق خاص بالبيانات التي يقل حجمها عن ٣٠ مفردة أما إذا كان حجم العينة > ٣٠ فأنه يستخدم اختبار (Z).

مثال (٤) :

البيانات الآتية تمثل تقديرات (١٠) طلاب اختيروا بطريقة عشوائية بالنسبة لمادتي الإحصاء والمحاسبة.

رقم الطالبة	الإحصاء	المحاسبة
١	جيد	جيد
٢	جيد جدا	ممتاز
٣	ممتاز	ممتاز
٤	مقبول	جيد
٥	ضعيف	مقبول
٦	جيد	مقبول
٧	ضعيف جدا	ضعيف
٨	جيد	مقبول
٩	جيد جداً	جيد جداً
١٠	مقبول	ضعيف

والمطلوب : هل هناك علاقة جوهرية بين تقديرات الطلبة في المادتين وما هي قوة واتجاه العلاقة.

الحــــل :

الإحصاء	المحاسبة	رتب الإحصاء	رتب المحاسبة	فروق الرتب ف	ف٢
جيد	جيد	٥	٤,٥	٥-	,٢٥
جيد جداً	ممتاز	٢,٥	١,٥	١,٠٠	١
ممتاز	ممتاز	١	١,٥	٠,٥ -	٠,٢٥
مقبول	جيد	٧,٥	٤,٥	٣,٠٠	٩
ضعيف	مقبول	٩	٧	٢,٠٠	٤
جيد	مقبول	٥	٧	٢,٠٠	٤
ضعيف جداً	ضعيف	١٠	٩,٥	٠,٥	,٢٥٠
جيد	مقبول	٥	٧	٢,٠ -	٤
جيد جداً	جيد جداً	٢,٥	٣	,٥ -	,٢٥
مقبول	ضعيف	٧,٥	٩,٥	٢,٠٠-	٤
مجـ					٢٧

ملاحظة الترتيب التنازلى للإحصاء :

أعلى تقدير هو (ممتاز) ⟵ ١

التقدير التالى هو (جيد جداً، جيد جداً) ⟵ $\frac{٢ + ٣}{٢} = ٢,٥$

(جيد، جيد، جيد) ⟵ $\frac{٤+٥+٦}{٣} = ٥$

(مقبول، مقبول) ⟵ $\frac{٧+٨}{٢} = ٧,٥$

ضعيـــف ⟵ ٩

ضعيف جداً ⟵ ١٠

الترتيب التنازلى للمحاسبة :

أعلى تقدير هو : (ممتاز، ممتاز) $\longleftarrow \dfrac{\text{١+٢}}{\text{٢}} = \text{١,٥}$

التقدير التالى هو : (جيد جداً) $\longleftarrow = \text{٣}$

(جيد، جيد) $\longleftarrow \dfrac{\text{٤+٥}}{\text{٢}} = \text{٤,٥}$

(مقبول، مقبول، مقبول) $\longleftarrow \dfrac{\text{٦+٧+٨}}{\text{٣}} = \text{٧}$

(ضعيف، ضعيف) $\longleftarrow \dfrac{\text{٩+١٠}}{\text{٢}} = \text{٩,٥}$

معامل ارتباط سبيرمان للرتب :

$$\text{ر}^* = \text{١} - \frac{\text{٦ مجـ ف}^{\text{٢}}}{\text{ن (ن}^{\text{٢}}\text{-١)}}$$

$$\text{ر} = \text{١} - \frac{\text{٦×٢٧}}{\text{١٠ (١٠}^{\text{٢}}\text{- ١)}}$$

$$= \text{١} - \frac{\text{١٦٢}}{\text{٩٩٠}}$$

$$= \text{١} - \text{,١٦٤} = \text{,٨٣٦}$$

∴ هناك علاقة طردية قوية بين تقديرات الإحصاء والمحاسبة

اختبار جوهرية العلاقة :

يلاحظ أن قيمة معامل ارتباط سبيرمان النظرية من الجدول أمام حجم العينة (١٠) = ,٦٤٩

وحيث أن قيمة ر* المحسوبة > قيمة ر النظرية.

∴ العلاقة جوهرية عند مستوى معنوية α = ٥%.

مثال (٥) :

الآتى يمثل عينة عشوائية من (٨) أسرا اختيروا لمعرفة العلاقـــة بيــن الدخل ونسبة المنفق على اللحوم.

رقم الأسرة	مستوى الدخل	نسبة المنفق على اللحوم
١	مرتفع	%١٠
٢	مرتفع جداً	%١٥
٣	متوسط	%١٦
٤	أقل من المتوسط	%١٧
٥	منخفض	%١٨
٦	منخفض جداً	%٢٠
٧	متوسط	%١٨
٨	أقل من المتوسط	%١٤

المطلوب : أوجد معامل الارتباط المناسب واختبر جوهريته عند مستوى معنوية α = ٥%.

الحل : حيث أن البيانات وصفية ونسب مئوية.

∴ يستخدم معامل ارتباط سبيرمان للرتب ويمكن إيجاده كالآتى :

الدخل	الأنفاق	رتب الدخل	رتب الإنفاق	ف	ف٢
مرتفع	١٠%	٢	٨	-٦	٣٦
مرتفع جداً	١٥%	١	٦	-٥	٢٥
متوسط	١٦%	٣,٥	٥	-١,٥	٢,٢٥
أقل من المتوسط	١٧%	٥.٥	٤	١,٥	٢,٢٥
منخفض	١٨%	٧	٢,٥	٤,٥	٢٠,٢٥
منخفض جداً	٢٠%	٨	١	٧	٤٩
متوسط	١٨%	٣,٥	٢,٥	١	١
أقل من المتوسط	١٤%	٥,٥	٧	-١,٥	٢,٢٥
مجـ					١٣٨

يلاحظ أن حجم العينة (ن) = ٨

$$\text{ر} = \text{١} - \frac{\text{٦ مجـ ف٢}}{\text{ن (ن٢-١)}}$$

$$\text{ر} = \text{١} - \frac{\text{٦×١٣٨}}{\text{٨ (٦٤-١)}}$$

$$= \text{١} - \frac{\text{٨٢٨}}{\text{٥٠٤}} = \text{١} - \text{١,٦٤٣} = \text{,٦٤٣}$$

∴ هناك علاقة عكسية.

اختبار جوهرية معامل الارتباط :

يلاحظ أنه قيمة معامل الارتباط النظرية من الجدول أمام حجم العينة (٨) = ٠,٧٣٨

وحيث أن قيمة ر* المحسوبة < قيمة ر النظرية.

∴ العلاقة غير جوهرية راجعة للصدفة بمستوى معنوية α = ٥%.

ويلاحظ أن اختبار معنوية ر* المحسوبة على أساس القيمة المطلقة لـها أى |ر*| = ٠,٦٤٣

مثال (٦) :

تم ترتيب ١١ لاعباً لكرة القدم عن طريق اثنين من الخبراء الرياضيين ووضع الترتيب في جدول كالآتي :

اللاعب	رأى الخبير الأول	رأى الخبير الثانى
هادى	٥	١١
حازم	٦	٤
ابراهيم	٢	٩
علاء	٧	٣
رضا	١	٢
حسام	٨	١
هانى	٤	١٠
عمارة	٩	٥
عبد الستار	٣	٨
محمد	١٠	٦
خالد	١١	٧

والمطلوب : معرفة مدى توافق الرأى بين الخبيرين واختبار الجوهرية..

الحل :

يلاحظ أن البيانات السابقة عبارة عن ترتيب للاعبين.

∴ نستخدم معامل ارتباط سبيرمانه للرتب كالآتي :

الحـــــل :

الرتب حسب الخبير الأول	الرتب حسب الخبير الثانى	فروق الرتب (ف)	$ف^٢$
٥	١١	٦-	٣٦
٦	٤	٢	٤
٢	٩	٧-	٤٩
٧	٣	٤	١٦
١	٢	١-	١
٨	١	٧	٤٩
٤	١٠	٦-	٣٦
٩	٥	٤	١٦
٣	٨	٥-	٢٥
١٠	٦	٤	١٦
١١	٧	٤	١٦
			٢٦٤

معامل ارتباط سبيرمان للرتب :

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ ف٢}}{ن\,(ن^{٢}-١)}$$

$$ر = ١ - \frac{٢٦٤\times٦}{١١\,(١٢١-١)}$$

$$= ١ - \frac{١٥٨٤}{١٣٢٠} = -\,٫٢$$

∴ **العلاقة عكسية ضعيفة**

اختبار جوهرية العلاقة :

- **حيث أن ر النظرية من الجدول عند حجم العينة (١١) = ٠,٦٠٩**
- **وحيث أن |ر*| المحسوبة < ر النظرية.**

∴ العلاقة تعتبر غير جوهرية أو راجعة للصدفة بمستوى معنوية α = ٥%.

٤- معامل الاقتران
Coefficient of Association

يستخدم لمعرفة قوة واتجاه العلاقة بين ظاهرتين وكل ظاهرة لها خاصيتين اثنتين فقط مثل العلاقة بين التدخين والإصابة بمرض معين، حيث أن ظاهرة التدخين تنقسم إلى مدخنين وغير مدخنين وظاهرة الإصابة بالمرض تنقسم إلى أصيب ولم يصاب بالمرض.

أو ظاهرة تجربة السلعة وظاهرة الإقبال على شرائها، حيث تنقسم ظاهرة تجربة السلعة إلى جرب السلعة ولم يجرب، وظاهرة الإقبال على الشراء تنقسم إلى اشترى ولم يشترى، حيث يتم وضع بيانات العينة بفرض أنها عن ظاهرتى التدخين والإصابة بالمرض فى جدول كالآتى :

الإصابة

		أصيب	لم يصاب
التدخين	مدخن	ك$_{١١}$	ك$_{٢١}$
	غير مدخن	ك$_{١٢}$	ك$_{٢٢}$

حيث أن

ك$_{١١}$: هو عدد مفردات العينة من المدخنين والذين أصيبوا بالمرض.

ك$_{٢١}$: هو عدد مفردات العينة من المدخنين والذين لم يصابوا بالمرض.

ك$_{١٢}$: هو عدد مفردات العينة من غير المدخنين الذين أصيبوا بالمرض.

ك$_{٢٢}$: هو عدد مفردات العينة من غير المدخنين الذين لم يصابوا بالمرض.

ويكون معامل الاقتران فى هذه الحالة :

$$\boxed{\text{أ} = \frac{(\text{ك}_{١١})(\text{ك}_{٢٢}) - (\text{ك}_{٢١})(\text{ك}_{١٢})}{(\text{ك}_{١١})(\text{ك}_{٢٢}) + (\text{ك}_{٢١})(\text{ك}_{١٢})}}$$

اختبار جوهرية معامل الاقتران :

(١) الفرض الأصلي أو فرض العدم : لا توجد علاقة جرهرية بين الظاهرتين.

(٢) الفرض البديل : توجد علاقة جوهرية بين الظاهرتين.

(٣) مستوى المعنوية (α) = ٥%.

(٤) **المقياس المناسب : توزيع (كا^2).**

$$\text{كا}^{2*} = \text{مجـ} \left(\frac{(\text{ك} - \text{ك}^{\wedge})^2}{\text{ك}^{\wedge}} \right)$$

(٥) إجراء العمليات الحسابية :

(٦) القـــرار.

إذا كانت كا^{2*} $\leq$ كا^2 النظرية بدرجات حرية (عدد الصفوف−١) (عدد الأعمدة −١) وعند مستوى المعنوية المفترض كانت العلاقة جوهرية والعكس صحيح.

حيث أن : ك: التكرارات المشاهدة (الموجودة في التمرين).

ك$^{\wedge}$: التكرارات المتوقعة.

$$= \frac{\text{مجموع الصف} \times \text{مجموع العمود}}{\text{مجموع التكرارات الكلية}}$$

مثال (٧) :

لمعرفة ما إذا كان هناك علاقة بين تجربة نوع جديد مـــن أنـــواع "الشـــامبو" والإقبال على شرائه، وزعت الشركة المنتجة عينات مجانية تستخدم لمرة واحدة فقـــط على عدد كبير جداً من عملاء محلات "السوبر ماركت" وبعد مرور (٥) أســـابيع تـــم اختيار عينة عشوائية من ٢٠٠ شخص من العملاء وقسمت تكراراتـــهم فـــي جـــدول الاقتران الآتي :

الشـــــراء

		أشترى	لم يشترى		المجموع
التجربة	جرب	٧٠	٥٠		١٢٠
	لم يجرب	٣٥	٤٥		٨٠
	المجموع	١٠٥	٩٥	=	٢٠٠

المطلوب : هل هناك علاقة جوهرية بين تجربة السلعة والإقبال على شرائها بمستوى معنوية (α) = ٥%.

الحل :

ك$_{١١}$=٧٠	ك$_{٢١}$=٥٠
ك$_{١٢}$=٣٥	ك$_{٢٢}$=٤٥

معامل الاقتران : $$\boxed{أ = \frac{(ك_{١١})(ك_{٢٢}) - (ك_{٢١})(ك_{١٢})}{(ك_{١١})(ك_{٢٢}) + (ك_{٢١})(ك_{١٢})}}$$

$$= \frac{٧٠\times٤٥ - ٥٠\times٣٥}{٧٠\times٤٥ + ٥٠\times٣٥} = ٫٢٨٦$$

اختبار جوهرية معامل الاقتران :

(١) فرض العدم:لا توجد علاقة جوهرية بين تجربة السلعة والإقبال على شرائها.

(٢) الفرض البديل : توجد علاقة جوهرية بين تجربة السلعة والإقبال على شرائها.

(٣) مستوى المعنوية (α) = ٥%.

(٤) المقياس المناسب : توزيع (كا^{٢})

$$كا^{٢} = مجـ \left(\frac{(ك - \hat{ك})^{٢}}{\hat{ك}} \right)$$

(ه) العمليات الحسابية :

$$\hat{ك} = \frac{\text{مجموع الصف} \times \text{مجموع العمود}}{\text{مجموع التكرارات الكلية}}$$

$$\hat{ك}_{١١} = \frac{١٢٠ \times ١٠٥}{٢٠٠} = ٦٣$$

$$\hat{ك}_{٢١} = \frac{١٢٠ \times ٩٥}{٢٠٠} = ٥٧$$

$$\hat{ك}_{١٢} = \frac{٨٠ \times ١٠٥}{٢٠٠} = ٤٢$$

$$\hat{ك}_{٢٢} = \frac{٨٠ \times ٩٥}{٢٠٠} = ٣٨$$

ك	$\hat{ك}$	$ك - \hat{ك}$	$(ك - \hat{ك})^٢$	$\frac{(ك_٠ - \hat{ك})^٢}{\hat{ك}}$
٧٠	٦٣	٧	٤٩	,٧٧٨
٥٠	٥٧	٧-	٤٩	,٨٦٠
٣٥	٤٢	٧-	٤٩	١,١٦٧
٤٥	٣٨	٧	٤٩	١,٢٨٩
٢٠٠	٢٠٠	صفر		٤,٠٩٤

$كا^{٢}_{٠}$

٦- القرار :

حيث أن $(كا^٢)$ النظرية بدرجات حرية (١) × (١) = (١) عند مستوى معنوية (α) = (٥%) = ٣,٨٤.

وحيث أن $كا^{٢}_{٠}$ > $كا^٢$ النظرية.

∴ العلاقة جوهرية بمستوى معنوية (α) = ٥%

٥- معامل التوافق

Coefficient of Contingency

إذا كانت أحد الظاهرتين (المتغيرين) المراد معرفة قوة العلاقة بينهما أو كلاهما مقسم إلى أكثر من خاصيتين، ففي هذه الحالة يستخدم معامل التوافق.

مثال ذلك دراسة العلاقة بين الاتجاه السياسي والموافقة على قرار معين فإنه يمكن تقسيم الاتجاه السياسي إلى حزب وطني، حزب الوفد، مستقلين والموافقة على قرار معين إلى موافق وغير موافق وفي هذه الحالة يمكن قياس معامل التوافق بالعلاقة الآتية :

$$\boxed{\text{معامل التوافق} = \sqrt{\frac{ق - ١}{ق}}}$$

مثال (٨) :

عند التصويت على مشروع الموازنة العامة للدولة في مجلس الشعب تم اختيار عينة عشوائية من ١٠٠ عضو وقسموا حسب انتماؤهم الحزبي والموافقة أو عدم الموافقة على مشروع الموازنة ووضعوا البيانات في الجدول الآتي :

	حزب وطني	حزب الوفد	مستقلين	مجـ
موافين	٧٠	٥	١	٧٦
غير موافق	١٠	١٠	٤	٢٤
مجـ	٨٠	١٥	٥	١٠ =

والمطلوب : معرفة ما إذا كان هناك علاقة جوهرية بين الموافقة على القرار والانتماء إلى الحزب الوطني بمستوى معنوية (α) = ٥%.

الحـلـــل :

مجموع الصف الأول : $\frac{(٧٠)^٢}{٨٠\times٧٦} + \frac{(٥)^٢}{١٥\times٧٦} + \frac{(١)^٢}{٥\times٧٦}$ = ,٨٣٠٥

مجموع الصف الثانى : $\frac{(١٠)^٢}{٨٠\times٢٤} + \frac{(١٠)^٢}{١٥\times٢٤} + \frac{(٤)^٢}{٥\times٢٤}$ = ,٤٦٣٢

ق = ١,٢٩٣٧

$$\boxed{\text{معامل التوافق} = \sqrt{\frac{\text{ق} - ١}{\text{ق}}}} = \sqrt{\frac{١,٢٩٣٧-١}{١,٢٩٣٧}} = ,٤٧٦$$

لاختبار جوهرية معامل التوافق :

$$\text{ك}^\wedge = \frac{\text{مجموع الصف} \times \text{مجموع العمود}}{\text{مجموع التكرارات الكلية}}$$

$$\text{ك}^\wedge_{١١} = \frac{٨٠\times٧٦}{١٠٠} = ٦٠,٨$$

$$\text{ك}^\wedge_{٢١} = \frac{١٥\times٧٦}{١٠٠} = ١١,٤$$

$$\text{ك}^\wedge_{٣١} = \frac{٥\times٧٦}{١٠٠} = ٣,٨$$

$$\text{ك}^\wedge_{١٢} = \frac{٨٠\times٢٤}{١٠٠} = ١٩,٢$$

$$\text{ك}^\wedge_{٢٢} = \frac{١٥\times٢٤}{١٠٠} = ٣,٦$$

$$\text{ك}^\wedge_{٣٢} = \frac{٥\times٢٤}{١٠٠} = ١,٢$$

مجـ = ١٠٠

خطوات الاختبار :

(١) فرض العدم : لا توجد علاقة جوهرية بين الموافقة والانتماء للحزب الوطني.

(٢) الفرض البديل : توجد علاقة جوهرية بين الموافقة والانتماء للحزب الوطني.

(٣) مستوى المعنوية (α) = ٥%.

(٤) المقياس المناسب : توزيع (كا^{٢}).

$$\text{كا}^{٢*} = \text{مجـ} \left(\frac{(\text{ك}-\hat{\text{ك}})^{٢}}{\hat{\text{ك}}} \right)$$

ك	$\hat{\text{ك}}$	ك − $\hat{\text{ك}}$	(ك−$\hat{\text{ك}}$)^{٢}	$\frac{(\text{ك}-\hat{\text{ك}})^{٢}}{\hat{\text{ك}}}$
٧٠	٦٠,٨	٩,٢	٨٤,٤٦	١,٣٩٢
٥	١١,٤	٦,٤−	٤٠,٩٦	٣,٥٩٣
١	٣,٨	٢,٨−	٧,٨٤	٢,٠٦٣
١٠	١٩,٢	٩,٢−	٨٤,٦٤	٤,٤٠٨
١٠	٣,٦	٦,٤	٤٠,٩٦	١١,٣٧٨
٤	١,٢	٢,٨	٧,٨٤	٦,٥٣٣
١٠٠	١٠٠	صفر		٢٩,٣٦٧

$\Downarrow$ كا^{٢*}

٦− القرار :

حيث أن (كا^{٢}) النظرية بدرجات حرية (١) × (٣) = (٢) عند مستوى معنوية (α) = (٥%) = ٥,٩٩.

وحيث أن كا^{٢*} > كا^{٢} النظرية.

∴ العلاقة بين الموافقة والانتماء إلى الحزب الوطني جوهرية بمستوى معنوية (α) = ٥%

٦- معامل الارتباط المتعدد

Multiple Correlation Coefficient

يقيس معامل الارتباط المتعدد قوة واتجاه العلاقة بين المتغير التابع (ص) من ناحية ومتغيرين مفسرين (س_1، س_2) على الأقل من ناحية أخرى.

ويمكن إيجاد معامل الإرتباط المتعدد من معاملات الإرتباط البسيطة كالآتي:-

$$\text{ر}_{\text{ص}:\text{س}_1\text{س}_2} = \sqrt{\frac{\text{ر}^2_{\text{ص س}_1} + \text{ر}^2_{\text{ص س}_2} - \text{ر}_{\text{ص س}_1}\ \text{ر}_{\text{ص س}_2}\ \text{ر}_{\text{س}_1\text{س}_2}}{1 - \text{ر}^2_{\text{س}_1\text{س}_2}}}$$

حيث :

$\text{ر}_{\text{ص س}_1}$: معامل الأرتباط البسيط بين ص ، س_1

$$= \frac{\text{مجـ}\ (\text{س}_1 - \bar{\text{س}}_1)\ (\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\sqrt{\text{مجـ}\ (\text{س}_1 - \bar{\text{س}}_1)^2}\ \sqrt{\text{مجـ}\ (\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2}}$$

$ر_{ص\,س_2}$: معامل الأرتباط البسيط بين (ص) ، ($س_2$)

$$= \frac{\text{مجـ}\,(س_2 - \bar{س}_2)\,(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\text{مجـ}\,(س_2 - \bar{س}_2)^2}\;\sqrt{\text{مجـ}\,(ص - \bar{ص})^2}}$$

$ر_{س_1\,س_2}$: معامل الأرتباط البسيط بين ($س_1$) ، ($س_2$)

$$= \frac{\text{مجـ}\,(س_1 - \bar{س}_1)\,(س_2 - \bar{س}_2)}{\sqrt{\text{مجـ}\,(س_1 \bar{س}_1)^2}\;\sqrt{\text{مجـ}\,(س_2 - \bar{س}_2)^2}}$$

إختبار جوهرية معامل الإرتباط المتعدد :

توجد أولاً :

- التغير الكلي (م.م.ك) = مجـ $(ص - \bar{ص})^2$
- التغير المفسر (م.م.ر) = $ر^2$ x $(ص - \bar{ص})^2$
- البواقي (م.م.ي) = م.م.ك - م.م.ر

الإختبار :

١-   الفرض الأصلى $\text{أ}_{.}$: $\text{ر}_{\text{ص.س}_{١}\text{س}_{٢}}$ = صفراً

٢-   الفرض البديل $\text{أ}_{١}$: $\text{ر}_{\text{ص.س}_{١}\text{س}_{٢}}$ $\neq$ صفراً

٣-   مستوى المعنوية α : ٥٪

٤-   المقياس الإحصائى المناسب : توزيع (ف).

٥-   جدول تحليل التباين :

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات التباين	ف*
المفسر	م.م.ر	٢	$\frac{\text{م.م.ر}}{٢}$	
البواقى	م.م.ى	ن - ك	$\frac{\text{م.م.ى}}{\text{ن - ك}}$	= $\frac{\text{م.م.ر}/٢}{\text{م.م.ى (ن - ك)}}$
الكلى	م.م.ك	ن - ١		

٦-   القرار :

إذا كانت قيمة (ف*) > (ف) النظرية عند مستوى (α = ٥٪) وبدرجات حرية (ك-١) ، (ن-ك).

يتم رفض الفرض الأصلى وقبول الفرض البديل أى أن معامل الإرتباط المتعدد جوهرياً إحصائياً والعكس صحيح.

مثال عام :

الآتي يمثل كل من حـجم المبيعات بـالمليون جنيه لأحـد أصناف الشـاي وحجم المنصرف على الإعـلان بالمليون جنيه وعدد منافذ التـوزيع خلال ثماني سنوات في الفتره من سنه ١٩٨٨ إلى سنه ١٩٩٥ .

السنه	حجم المبيعات بالمليون جنيه مصري	مقدار المنصر على الاعلانات بالمليون جنيه مصري	عدد منافذ التوزيع
١٩٨٨	٧	٤	٥
١٩٨٩	٩	٣	١٠
١٩٩٠	١١	٤	١٢
١٩٩١	١٥	٩	١٥
١٩٩٢	١٢	٥	١٥
١٩٩٣	١١	٣	١٨
١٩٩٤	١٦	٨	٢٠
١٩٩٥	١٥	٥	٢٣

والمطلوب :

١- تقدير معاملات الارتباط البسيطة:

$ر_{ص س_١}$ ، $ر_{ص س_٢}$ ، $ر_{س_١ س_٢}$.

٢- تقدير معامل الارتباط المتعدد من معاملات الارتباط البسيطة.

٣- اختبار جوهرية معامل الارتباط المتعدد عند مستوى معنوية (α) = ٥%

الحل :

يمكن وضع البيانات السابقة فى الجدول الآتى :

ص	$س_1$	$س_2$	ص $س_1$	ص $س_2$	$س_1$ $س_2$	$ص^2$	$س_1^2$	$س_2^2$
٧	٤	٥	٢٨	٣٥	٢٠	٤٩	١٦	٢٥
٩	٣	١٠	٢٧	٩٠	٣٠	٨١	٩	١٠٠
١١	٤	١٢	٤٤	١٣٢	٤٨	١٢١	١٦	١٤٤
١٥	٩	١٥	١٣٥	٢٢٥	١٣٥	٢٢٥	٨١	٢٢٥
١٢	٥	١٥	٦٠	١٨٠	٧٥	١٤٤	٢٥	٢٢٥
١١	٣	١٨	٣٣	١٩٨	٥٤	١٢١	٩	٣٢٤
١٦	٨	٢٠	١٢٨	٣٢٠	١٦٠	٢٥٦	٦٤	٤٠٠
١٥	٥	٢٣	٧٥	٣٤٥	١١٥	٢٢٥	٢٥	٥٢٩
٩٦	٤١	١١٨	٥٣	١٥٢٥	٦٣٧	١٢٢٢	٢٤٥	١٩٧٢

ويمكن إيجاد المجاميع السته الآتيه :-

$$١-\ \text{مجـ}\,(س_1-\bar{س}_1)\,(ص-\bar{ص}) = \text{مجـ}\,س_1ص - \frac{\text{مجـ}\,س_1\ \text{مجـ}\,ص}{ن}$$

$$= ٥٣٠ - \frac{٩٦ \times ٤١}{٨} = ٣٨$$

$$٢-\ \text{مجـ}\,(س_2-\bar{س}_2)\,(ص-\bar{ص}) = \text{مجـ}\,س_2ص - \frac{\text{مجـ}\,س_2\ \text{مجـ}\,ص}{ن}$$

$$= ١٥٢٥ - \frac{٩٦ \times ١٨}{٨} = ١٠٩$$

$$\text{٣- مجـ}\,(\text{س}_{١} - \bar{\text{س}}_{١})^{٢} = \text{مجـ س}_{١}^{٢} - \frac{(\text{مجـ س}_{١})^{٢}}{\text{ن}}$$

$$= ٢٤٥ - \frac{(٤١)^{٢}}{٨} = ٣٤{,}٨٧٥$$

$$\text{٤- مجـ}\,(\text{س}_{٢} - \bar{\text{س}}_{٢})^{٢} = \text{مجـ س}_{٢}^{٢} - \frac{(\text{مجـ س}_{٢})^{٢}}{\text{ن}}$$

$$= ١٩٧٢ - \frac{(١١٨)^{٢}}{٨} = ٢٣١{,}٥$$

$$\text{٥- مجـ}\,(\text{س}_{١} - \bar{\text{س}}_{١})\,(\text{س}_{٢} - \bar{\text{س}}_{٢}) = \text{مجـ س}_{١}\text{س}_{٢} - \frac{\text{مجـ س}_{١}\ \text{مجـ س}_{٢}}{\text{ن}}$$

$$= ٦٣٧ - \frac{١١٨ \times ٤١}{٨} = ٣٢{,}٢٥$$

$$\text{٦- مجـ}\,(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^{٢} = \text{مجـ ص}^{٢} - \frac{(\text{مجـ ص})^{٢}}{\text{ن}}$$

$$= ١٢٢٢ - \frac{(٩٦)^{٢}}{٨} = ٧٠$$

أولاً : إيجاد معاملات الإرتباط البسيطه :

$$(١)\quad ر_{\text{ص س}_١} = \frac{\text{مجـ}(\text{س}_١-\bar{\text{س}}_١)(\text{ص}-\bar{\text{ص}})}{\sqrt{\text{مجـ}(\text{س}_١-\bar{\text{س}}_١)^٢}\ \sqrt{\text{مجـ}(\text{ص}-\bar{\text{ص}})^٢}}$$

$$= \frac{٣٨}{\sqrt{٣٤,٨٧٥}\ \sqrt{٧٠}} = \text{٧٦٩١ر}$$

$$(٢)\quad ر_{\text{ص س}_٢} = \frac{\text{مجـ}(\text{س}_٢-\bar{\text{س}}_٢)(\text{ص}-\bar{\text{ص}})}{\sqrt{\text{مجـ}(\text{س}_٢-\bar{\text{س}}_٢)^٢}\ \sqrt{\text{مجـ}(\text{ص}-\bar{\text{ص}})^٢}}$$

$$= \frac{١٠٩}{\sqrt{٢٣١,٥}\ \sqrt{٧٠}} = \text{٨٥٦٣ر}$$

$$(٣)\quad ر_{\text{س}_١\text{س}_٢} = \frac{\text{مجـ}(\text{س}_١-\bar{\text{س}}_١)(\text{س}_٢-\bar{\text{س}}_٢)}{\sqrt{\text{مجـ}(\text{س}_١-\bar{\text{س}}_١)^٢}\ \sqrt{\text{مجـ}(\text{س}_٢-\bar{\text{س}}_٢)^٢}}$$

$$= \frac{٣٢,٢٥}{\sqrt{٣٤,٨٧٥}\ \sqrt{٣١,٥}} = \text{٣٥٨٩ر}$$

ثانياً : إيجاد معامل الإرتباط المتعدد من معاملات الإرتباط البسيطه:-

$$r_{\text{ص}.\text{س}_1\text{س}_2} = \sqrt{\frac{r^2_{\text{ص س}_1} + r^2_{\text{ص س}_2} - 2\, r_{\text{ص س}_1}\, r_{\text{ص س}_2}\, r_{\text{س}_1\text{س}_2}}{1 - r^2_{\text{س}_1\text{س}_2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\text{٧٦٩١ر})^2 + (\text{٨٥٦٣ر})^2 - 2 \times \text{٧٦٩١ر} \times \text{٨٥٦٣ر} \times \text{٣٥٨٩ر}}{1 - (\text{٧٦٩١ر})^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{٨٥١٩٤٥ر}}{\text{٨٧١١٧٧ر}}} = \sqrt{\text{٩٧٧٩٢ر}} = \text{٩٨٨٩ر}$$

ثالثاً : إختبار معامل الإرتباط المتعدد:-

يعتمد هذا الاختبار أساسًا على توزيع (ف) وجدول تحليل التباين :

حيث أن :

- $\boxed{\text{التغير الكلي م.م.ك} = \text{مجـ}(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2}$

$= ٧٠$

- $\boxed{\text{التغير المفسر م.م.ر} = \text{مجـ}(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2 \times r^2_{\text{ص}.\text{ص}_1\text{س}_2}}$

$= ٧٠ \times \text{٩٧٧٩٢ر}$

$= \text{٦٨ر٤٥٤}$

- التغير العشوائي أو البواقي م.م.ي = ٧٠ - ٦٨٫٤٥٤

= ١٫٥٤٦

ويتم الإختبارات كالأتي:

١- الفرض الأصلي أ. : ر ص. س١ س٢ = صفراً

٢- الفرض البديل أ١ : ر ص. س١ س٢ ≠ صفراً.

٣- مستوى المعنويه α : ٥٪ .

٤- المقياس الإحصائي المناسب : توزيع (ف).

٥- جدول تحليل التباين :

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحريه	متوسط المربعات التباين	ف*
المفسر	٦٨٫٤٥٤	٢	٦٨٫٤٥٤ ÷ ٢ = ٣٤٫٢٢٧	
البواقي	١٫٥٤٦	٥	١٫٥٤٦ ÷ ٥ =٠٫٣٠٩١	٣٤٫٢٢٧÷ ٠٫٣٠٩١ = ١١٠٫٧٢
الكلي	٧٠	ن-١=٧		

٦ القرار :

حيث أن قيمة (ف*) > (ف) النظرية .

يتم رفض الفرض الأصلي وقبول الفرض البديل بمستوى معنويه (α = ٥٪).

إي أن معامل الأرتباط المتعدد معنويًا إحصائيًا

٧- معاملات الأرتباط الجزئية
Partial Correlation Coefficient

يقيس معامل الارتباط المتعدد والجزئي $ر_{ص س_١ . س_٢}$ قوة وإتجاه العلاقة بين المتغير التابع (ص) و المتغير المفسر ($س_١$) مع استبعاد تأثير المتغير المستقل ($س_٢$)، وبالمثل فإن معامل الإرتباط الجزئي $ر_{ص س_٢ . س_١}$ يقيس قوة وإتجاه العلاقة بين (ص، $س_٢$) مع استبعاد وتأثير ($س_١$):

ويمكن إيجاد معاملات الإرتباط الجزئية مع العلاقات الآتيه :-

$$ر_{ص س_١ . س_٢} = \frac{ر_{ص س_١} - ر_{ص س_٢} \, ر_{س_٢ س_١}}{\sqrt{١ - ر^٢_{ص س_٢}} \sqrt{١ - ر^٢_{س_١ س_٢}}} \qquad (٦:١)$$

$$ر_{ص س_٢ . س_١} = \frac{ر_{ص س_٢} - ر_{ص س_١} \, ر_{س_١ س_٢}}{\sqrt{١ - ر^٢_{ص س_١}} \sqrt{١ - ر^٢_{س_٢ س_١}}} \qquad (٦:٢)$$

وسوف يتم دراسة ثلاثة أشياء في هذا الجزء هي :

١- إيجاد معامل الإرتباط الجزئي.
٢- إختبار معنوية معامل الإرتباط الجزئي
٣- إيجاد معامل التحديد الجزئي.

في المثال السابق حيث كانت معاملات الإرتباط البسيطه هي :-

$ر_{ص س_1} = ٧٦٩١ر$ $\quad$ $ر_{ص س_2} = ٦٥٨٣ر$ $\quad$ $ر_{س_1 س_2} = ٣٥٨٩ر$ $\quad$ ن = ٨

<u>المطلوب :</u>

أولاً أوجد معاملات الإرتباط الجزئية :-

$ر_{ص س_1 \cdot س_2}$ ، $ر_{ص س_2 \cdot س_1}$ ، وفسر معناها.

ثانيًا: إختبر معنوية معامل الإتباط الجزئي $ر_{ص س_1 \cdot س_2}$ إذا علمت إن ت النظرية بدرجات حريه (٥) وعند مستوى معنوية(α :٥٪)= ٢ر٥٧١ .

ثالثًا: أوجد معامل التحديد الجزئي $ر^2_{ص س_1 \cdot س_2}$ وفسر معناه.

أولاً :معاملات الإرتباط الجزئية :-

١- معامل الإرتباط الجزئي بين(ص،$س_1$) مع استبعاد تأثير ($س_2$)

$$ر_{ص س_1 \cdot س_2} = \frac{ر_{ص س_1} - ر_{ص س_2} \; ر_{س_1 س_2}}{\sqrt{1 - ر^2_{ص س_2}} \; \sqrt{1 - ر^2_{س_2 س_1}}}$$

$$= \frac{٧٦٩١ر - ٨٥٦٣ر \times ٣٥٨٩ر}{\sqrt{1 - (٨٥٦٣ر)^2} \; \sqrt{1 - (٣٥٨٩ر)^2}}$$

$$= \frac{\text{٤٦١٧٧ر}}{\sqrt{\text{٢٣٢٤٦ر}}}$$

$$= \frac{\text{٤٦١٧٧ر}}{\text{٤٨٢١٤ر}} = \text{٩٥٧٧٥ر}$$

٢- معامل الإرتباط الجزئي بين (ص، س$_{٢}$) مع استبعاد تأثير (س$_{١}$)

$$ر_{\text{ص س}_٢\text{.س}_١} = \frac{ر_{\text{ص س}_٢} - ر_{\text{ص س}_١}\ ر_{\text{س}_١\text{ س}_٢}}{\sqrt{١ - ر^{٢}_{\text{ص س}_١}}\ \sqrt{١ - ر^{٢}_{\text{س}_٢\text{ س}_١}}}$$

$$= \frac{\text{٨٥٦٣} - \text{٧٦٩١ر} \times \text{٣٥٨٩ر}}{\sqrt{١ - (\text{٧٦٩١ر})^{٢}}\ \sqrt{١ - (\text{٣٥٨٩ر})^{٢}}}$$

$$= \frac{\text{٥٨٠٢ر}}{\sqrt{\text{٣٥٥٨٨ر}}}$$

$$= \frac{\text{٥٨٠٢ر}}{\text{٥٩٦٥٥ر}}$$

$$= \text{٩٧٢٦ر}$$

ثانياً : إختبار معنوية معامل الإرتباط الجزئى $ر_{ص س_١ . س_٢}$

١– الفرض الأصلى $أ_٠$: $ر_{ص س_١ . س_٢}$ = صفراً

٢– الفرض البديل $أ_١$: $ر_{ص س_١ . س_٢} \neq$ صفراً.

٣– مستوى المعنوية α : ٥٪ .

٤– المقياس الإحصائي المناسب : توزيع (ت).

$$\boxed{ت^* = \frac{ر_{ص س_١ . س_٢} \sqrt{ن - ٣}}{\sqrt{١ - ر^٢_{ص س_١ . س_٢}}}}$$

٥- العمليات الحسابية :

$$ت^* = \frac{٠,٩٥٧٧٥ \sqrt{٨ - ٣}}{\sqrt{١ - (٠,٩٥٧٧٥)^٢}}$$

$$ت = \frac{٠,٩٥٧٧٥ \times ٢,٢٣٦٠٦٨}{\sqrt{١ - (٠,٩٥٧٧٥)^٢}}$$

$$= \frac{٢,١٤١٥٨}{٠,٢٨٧٦٢}$$

$$= ٧,٤٤٦$$

٦ القرار :

حيث أن قيمة (ت*) > (ت) النظرية .

يتم رفض الفرض الأصلي وقبول الفرض البديل بمستوى معنوية (α = ٥٪).

إي أن معامل الإرتباط الجزئي معنويًا إحصائيًا .

ثالثًا : إيجاد معامل التحديد الجزئي: $ر^{٢}_{ص س_١ . س_٢}$

$$ر^{٢}_{ص س_١ . س_٢} = (٠,٩٥٧٧٥)^{٢}$$

$$= ٠,٩١٧٣$$

معنى معامل التحديد الجزئي :

إن (٩٥,٧٧٧٥٪) من التغيرات التي تحدث في قيمة المبيعات (ص) ترجع إلى التغير في المنصرف على الإعلان ($س_١$) مع ثبات تأثير عدد منافذ التوزيع($س_٢$) على قيمة المبيعات.

* * * * *

الباب الثانى

الانحدار المتعدد

Multiple Regression

مقـــدمة :

إن أي ظاهرة إقـتصـادية مثل حـجم المبيـعات أو الإنتـاج أو الأرباح أو الأسعار أو غيرها يتحكم فيها مجمـوعة من المتغيرات الإقتصادية، بعضها يؤثر بالإيجاب والبعض الآخر يؤثر بالسلب، بعضها له تأثير قوي والبعض الآخر له تأثير ضعيف، فـالتغير والمتغيرات هما أسـاس الحياه وسنة الله في الكون حيث يقول سبحـانه في كتابه العزيز: ﴿ يَسْئَلُهُ مَن فِى السَّمٰوٰتِ والأَرضِ كُلَّ يومٍ هُوَ فِي شَأْن ﴾ [الرحمن:٢٩] فـسبحانه وتعالى وحدة يغير ولا يتغير، يرفع أقوام ويخفض أقوام، يحيى ويميت وهو حي لا يموت .

وقد سمي المتغيـر الإقتصادي بهذا الأسم، لأن قيمتـه تتغير من شخص إلى آخر ومن زمن إلى أخر بطريقة لا يستطيع المرء أن يجـد لها تفـسيراً، فيطلق عليها مـسمى: «المتغيرات العشوائية» فالدخل مثلاً تختلف قيمته ومعدل تغيره من شخص لأخـر، وبالنسبة لنفس الشـخص يختلف دخله من زمن لآخر بكمـية وطريقه يجد المرء نفـسه أمامها حائرًا، وفي وسط هذه الدوامـات من المتغيرات يحاول الإقتصـادي أن يتلمس طريقه لمعرفة المتغـيرات التي تؤثر في ظاهرة ما، وحجم وقوة وإتجاه هذه المتغيرات، إلى جانب محاولة التنبؤ بقيمته الظاهره في فتـرات زمنيه مـقبله، وقـد وجد الاقـتصاديون ضـالتهم في بعض الأسـاليب الإحصائيـة كالإنحدار المتعـدد، وسوف يتم تقسيم هذا الجـزء إلى فصلين هما :

- الفصل الأول : تقدير وتقييم نماذج الانحدار.
- الفصل الثانى : بعض مشاكل القياس.

أولاً: الإنحدار الخطي المتعدد
Multiple Linear Reggression

بفرض وجود علاقة خطية بين المتغيرين المفسرين ($س_1$، $س_2$) من ناحية والمتغير التابع (ص) من ناحية أخرى، فإن العلاقة الدالية في هذه الحالة يمكن أن تكتب على الصورة :

$$ص_ر = أ + ب_1 س_{1ر} + ب_2 س_{2ر} + ي_ر$$

$$ر = (1، 2، 3، . . . ن) \qquad (2:1)$$

حيث :

"$ي_ر$" : المتغير العشوائي الذي يتمتع بالخصائص الست السابق ذكرها في (1:2)

أ، $ب_1$، $ب_2$: معالم العلاقة المطلوب تقديرها.

والعلاقة المقدرة للعلاقة (2:1) السابقة تكون :

$$\hat{ص}_ر = \hat{أ} + \hat{ب}_1 س_{1ر} + \hat{ب}_2 س_{2ر} \qquad (2:2)$$

حيث :

$\hat{أ}$ ، $\hat{ب}_1$، $\hat{ب}_2$: هي القيم المقدره للمعالم (أ، $ب_1$، $ب_2$)

والموضوعات التي ستعالج هنا هي :

- تقدير معالم نموذج الانحدار المتعدد.
- تقييم التقديرات .
- التنبؤ .
- تقدير المرونات.
- تقدير معامل التحديد ومعامل الارتباط المتعدد
- تقدير معاملات الارتباط الجزئية .

١- تقدير معالم نموذج الانحدار الخطي المتعدد
Prameters Estimation

يمكن إيجاد تقديرات طريقة المربعات الصغرى Least Squares لمعالم نموذج الإنحدار المتعدد ($\hat{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{ب}}_1$، $\hat{\text{ب}}_2$) الموجود في العلاقة (٢:٢) السابقة بإتباع الاتي:

١- من العلاقة (٢:١) السابقه يمكن استنتاج أن :

$$\text{مجـ } \text{ي}_{\text{ر}}^2 = \text{مجـ} \left[\text{ص}_{\text{ر}} - \text{أ} - \text{ب}_1 \text{س}_{1\text{ر}} - \text{ب}_2 \text{س}_{2\text{ر}} \right]^2 \qquad (٢:٣)$$

٢- تصغير قيمة(مجـ $\text{ي}_{\text{ر}}^2$) إلى أقل قيمة ممكنه، حيث أن طريقة المربعات الصغرى تهـدف أساساً إلى جعل مجـموع مربعات الأخطاء العشوائية إلى ادنى حـد ممكن، ويتم ذلك بإجـراء التفـاضـلات الجزئيـة الاولى للعلاقة (٢:٣) السابقة بالنسبة لـ (أ ثم ب_1 ثم ب_2) ومساواة المعاملات التفاضلية الجزئية الاولى بالصفر، ويتم ذلك كما يلي:

$$\frac{\partial\, \text{ي}^{2}}{\partial\, \text{أ}} = \text{مجـ}\,[\text{صر} - \hat{\text{أ}} - \hat{\text{ب}}_{1}\,\text{س}_{1\text{ر}} - \hat{\text{ب}}_{2}\,\text{س}_{2\text{ر}}]\,[-1] =$$

$$\frac{\partial\, \text{ي}^{2}}{\partial\, \text{ب}_{1}} = \text{مجـ}\,[\text{صر} - \hat{\text{أ}} - \hat{\text{ب}}_{1}\,\text{س}_{1\text{ر}} - \hat{\text{ب}}_{2}\,\text{س}_{2\text{ر}}]\,[\text{س}_{1\text{ر}}] = 0$$

$$\frac{\partial\, \text{ي}^{2}}{\partial\, \text{ب}_{2}} = \text{مجـ}\,[\text{صر} - \hat{\text{أ}} - \hat{\text{ب}}_{1}\,\text{س}_{1\text{ر}} - \hat{\text{ب}}_{2}\,\text{س}_{2\text{ر}}]\,[\text{س}_{2\text{ر}}] = 0$$

(٢:٤)

٣- من العلاقة (٢:٤) السابقة يمكن إستنتاج المعادلات الطبيعية الآتية:

$$\text{مجـ صر} = \text{ن}\,\hat{\text{أ}} + \hat{\text{ب}}_{1}\,\text{مجـ س}_{1\text{ر}} + \hat{\text{ب}}_{2}\,\text{مجـ س}_{2\text{ر}}$$

$$\text{مجـ س}_{1}\,\text{صر} = \hat{\text{أ}}\,\text{مجـ س}_{1} + \hat{\text{ب}}_{1}\,\text{مجـ س}^{2}_{1\text{ر}} + \hat{\text{ب}}_{2}\,\text{مجـ س}_{1}\,\text{س}_{2\text{ر}}$$

$$\text{مجـ س}_{2}\,\text{ص} = \hat{\text{أ}}\,\text{مجـ س}_{2} + \hat{\text{ب}}_{1}\,\text{مجـ س}_{1\text{ر}}\,\text{س}_{2\text{ر}} + \hat{\text{ب}}_{2}\,\text{مجـ س}^{2}_{2\text{ر}}$$

(٢:٥)

٣- بحل المعادلات الموجوده في العلاقه (٢:٥) السابقه آنيًا يتم الحصول على المعالم ($\hat{\text{أ}}$، $\hat{\text{ب}}_{1}$، $\hat{\text{ب}}_{2}$)، كما سيتضح من المثال العام التالي :-

مثال عام :

الآتي يمثل كل من حجم المبيعات بالمليون جنيه لأحد أصناف الشاي وحجم المنصرف على الإعلان بالمليون جنيه وعدد منافذ التوزيع خلال ثماني سنوات في الفتره من سنه ١٩٨٨ إلى سنه ١٩٩٥

السنه	حجم المبيعات بالمليون جنيه مصري	مقدار المنصر على الاعلانات بالمليون جنيه مصري	عدد منافذ التوزيع
١٩٨٨	٧	٤	٥
١٩٨٩	٩	٣	١٠
١٩٩٠٠	١١	٤	١٢
١٩٩١	١٥	٩	١٥
١٩٩٢	١٢	٥	١٥
١٩٩٣	١١	٣	١٨
١٩٩٤	١٦	٨	٢٠
١٩٩٥	١٥	٥	٢٣

فإنه يمكن تقدير علاقه الإنحدار المتعدد بين حجم المبيعات كمتغير تابع (ص) وكلا من المنصرف على الاعلان ($س_١$) وعدد منافذ التوزيع ($س_٢$) كمتغيرات مفسره على الصوره :

$$\hat{ص} = \hat{أ} + \hat{ب}_١ س_١ + \hat{ب}_٢ س_٢ \qquad (٢ : ٦)$$

ويمكن تقدير المعالم ($\hat{أ}$، $\hat{ب}_١$ ، $\hat{ب}_٢$) بإحدى ثلاث طرق هي :

أولاً : تقدير معالم الإنحدار عن طريق حل الثلاث معادلات الطبيعية آنياً

ص	س$_1$	س$_2$	ص س$_1$	ص س$_2$	س$_1$ س$_2$	ص^2	س$_1^2$	س$_2^2$
٧	٤	٥	٢٨	٣٥	٢٠	٤٩	١٦	٢٥
٩	٣	١٠	٢٧	٩٠	٣٠	٨١	٩	١٠٠
١١	٤	١٢	٤٤	١٣٢	٤٨	١٢١	١٦	١٤٤
١٥	٩	١٥	١٣٥	٢٢٥	١٣٥	٢٢٥	٨١	٢٢٥
١٢	٥	١٥	٦٠	١٨٠	٧٥	١٤٤	٢٥	٢٢٥
١١	٣	١٨	٣٣	١٩٨	٥٤	١٢١	٩	٣٢٤
١٦	٨	٢٠	١٢٨	٣٢٠	١٦٠	٢٥٦	٦٤	٤٠٠
١٥	٥	٢٣	٧٥	٣٤٥	١١٥	٢٢٥	٢٥	٥٢٩
٩٦	٤١	١١٨	٥٣٠	١٥٢٥	٦٣٧	١٢٢٢	٢٤٥	١٩٧٢

المعادلات الطبيعية هي :

مجـ ص = ن أ̂ + ب̂$_1$ مجـ س$_1$ + ب̂$_2$ مجـ س$_2$

مجـ س$_1$ ص = أ̂ مجـ س$_1$ + ب̂$_1$ مجـ س$_1^2$ + ب̂$_2$ مجـ س$_1$ س$_2$

مجـ س$_2$ ص = أ̂ مجـ س$_2$ + ب̂$_1$ مجـ س$_1$ س$_2$ + ب̂$_2$ مجـ س$_2^2$

(٢ : ٧)

بالتعويض بالقيم الرقميه مع ملاحظة أن عدد الملاحظات ن = ٨

٩٦ = ٨ أ̂ + ٤١ ب̂$_1$ + ١١٨ ب̂$_2$ ⟵ (١)

٥٣٠ = ٤١ أ̂ + ٢٤٥ ب̂$_1$ + ٦٧٣ ب̂$_2$ ⟵ (٢)

١٥٢٥ = ١١٨ أ̂ + ٦٣٧ ب̂$_1$ + ١٩٧٢ ب̂$_2$ ⟵ (٣)

ويتم حل الثلاث معـادلات السـابقه آنيًا عن طريق الحذف والاضافـة كما يلى :.

١) بالنسبة للمعادلتين (١,٢) :

بضرب المعادله (١) x (٤١) وضرب المعادله (٢) x (٨) ينتج الآتي:

٢٩٣٦ = ٣٢٨ أ̂ + ١٦٨١ ب̂$_1$ + ٤٨٣٨ ب̂$_2$ ⟵ (٣)

٤٢٤٠ = ٣٢٨ أ̂ + ١٩٦٠ ب̂$_1$ + ٥٠٩٦ ب̂$_2$ ⟵ (٤)

وبطرح المعادله (٣) من المعادله (٤) ينتج الأتي:

٣٠٤ = ٢٧٩ ب̂$_1$ + ٢٥٨ ب̂$_2$ ⟵ (٥)

٢) بالنسبة للمعادلتين (١,٣) :

بضرب المعادله (١) x (١١٨) وضرب المعادله(٢) x (٨) ينتج الآتي:

١٣٢٨ = ٩٤٤ أ̂ + ٤٨٣٨ ب̂$_1$ + ١٣٩٢٤ ب̂$_2$ ⟵ (٦)

١٢٢٠٠ = ٩٤٤ أ̂ + ٥٠٩٦ ب̂$_1$ + ١٥٧٧٦ ب̂$_2$ ⟵ (٧)

وبطرح المعادله (٦) من المعادله (٧) ينتج الأتي:

٨٧٢ = ٢٥٨٠ ب̂$_1$ + ١٨٥٢ ب̂$_2$ ⟵ (٨)

٣) بالنسبة للمعادلتين (٥، ٨) :

بضرب المعادله (٥) x (٢٥٨) وضرب المعادله(٨) x (٢٧٩) ينتج الآتي:

٧٨٤٣٢ = ٧١٩٨٢ بَ$_{١}$ + ٦٦٥٦٤ بَ$_{٢}$ ← (٩)

٢٤٣٢٨٨ = ٧١٩٨٢بَ$_{١}$ + ٥١٦٧٠٨ بَ$_{٢}$ ← (١٠)

وبطرح المعادله (٩) من المعادله (١٠) ينتج الأتى:

١٦٤٨٥٦= ٤٥٠١٤٤ب$_{٢}$

بَ$_{٢}$= ١٦٤٨٥٦ ÷ ٤٥٠١٤٤ = ٫٣٦٦٢٢٩ ← (١١)

ولايجاد قيمة بَ$_{١}$ يتم التعويض في المعادله (٥) عن ب$_{٢}$ = (٫٣٦٦٢٢٩)

ينتج الاتي:-

٣٠٤ = ٢٧٩ ب$_{١}$ + ٢٥٨(٫٣٦٦٢٢٩)

٣٠٤ = ٢٧٩ ب$_{١}$ + ٩٤٫٤٨٧٢٠٤

٣٠٤ - ٩٤٫٤٨٧٢٠٤=٢٧٩ ب$_{١}$

٢٠٩٫٥١٢٧٩٦= ٢٧٩ ب$_{١}$

بَ$_{١}$=٢٠٩٫٥١٢٧٩٦ + ٢٧٩= ٫٧٥٠٩٤٢ ← (١٢)

ولايجاد قيمة (أ) يتم التعويض في المعادله ١ عن قيم (ب$_{١}$، ب$_{٢}$) ينتج الاتي:-

٩٦= ٨ أ + ٤١ (٫٧٥٠٩٤٢) + ١١٨ (٫٣٦٦٢٢٩)

٩٦= ٨ أ + ٧٤٫٠٠٣٦٤٤

$\hat{أ}$ ٨ = ٢١٫٩٩٦٣٥٦

$\hat{أ}$ = ٢١٫٩٩٦٣٥٦ ÷ ٨ = $\boxed{٢٫٧٤٩٥٤٤٥}$ ← (١٣)

وعلى ذلك تكون علاقة الإنحدار المتعدد على الصوره الآتيه:

$\boxed{\hat{ص} = ٢٫٧٤٩٥٤٤٥ + ٧٥٠٩٤٢ر\ س_{١} + ٣٦٦٢٢٩ر\ س_{٢}}$ ← (١٤)

ثانيًا : تقدير معالم نموذج الإنحدار المتعدد باستخدام طريقة المعادلات المختصرة:-

(١) لايجاد $\hat{ب}_{١}$ ، $\hat{ب}_{٢}$ تحل المعادلتين الآتيتين معًا :-

مجـ (س$_{١}$ − $\bar{س}_{١}$) (ص − $\bar{ص}$) = ب$_{١}$ مجـ (س$_{١}$ − $\bar{س}_{١}$)^{٢}

+ ب$_{٢}$ مجـ (س$_{١}$ − $\bar{س}_{١}$) (س$_{٢}$ − $\bar{س}_{٢}$) ← (١٥)

مجـ (س$_{٢}$ − $\bar{س}_{٢}$) (ص − ص) = ب$_{١}$ مجـ (س$_{١}$ − $\bar{س}_{١}$) (س$_{٢}$ − $\bar{س}_{٢}$)

+ ب$_{٢}$ مجـ (س$_{٢}$ − $\bar{س}_{٢}$)^{٢} ← (١٦)

ويمكن إيجاد المجاميع السته الآتيه :-

١- مجـ (س$_{١}$ − $\bar{س}_{١}$) (ص − $\bar{ص}$) = مجـ س$_{١}$ص − $\dfrac{\text{مجـ س}_{١}\ \text{مجـ ص}}{\text{ن}}$

= ٥٣٠ − $\dfrac{٤١ \times ٩٦}{٨}$ = ٣٨

٢- مجـ (س$_{٢}$ − $\bar{س}_{٢}$) (ص − $\bar{ص}$) = مجـ س$_{٢}$ص − $\dfrac{\text{مجـ س}_{٢}\ \text{مجـ ص}}{\text{ن}}$

= ١٥٢٥ − $\dfrac{١٨ \times ٩٦}{٨}$ = ١٠٩

$$\text{٣- مجـ}\,(\text{س}_1-\bar{\text{س}}_1)^2 = \text{مجـ س}_1^2 - \frac{(\text{مجـ س}_1)^2}{\text{ن}}$$

$$= ٢٤٥ - \frac{(٤١)^2}{٨} = ٣٤٫٨٧٥$$

$$\text{٤- مجـ}\,(\text{س}_2-\bar{\text{س}}_2)^2 = \text{مجـ س}_2^2 - \frac{(\text{مجـ س}_2)^2}{\text{ن}}$$

$$= ١٩٧٢ - \frac{(١١٨)^2}{٨} = ٢٣١٫٥$$

$$\text{٥- مجـ}\,(\text{س}_1-\bar{\text{س}}_1)(\text{س}_2-\bar{\text{س}}_2) = \text{مجـ س}_1\text{س}_2 - \frac{\text{مجـ س}_1\ \text{مجـ س}_2}{\text{ن}}$$

$$= ٦٣٧ - \frac{١١٨ \times ٤١}{٨} = ٣٢٫٢٥$$

$$\text{٦- مجـ}\,(\text{ص}-\bar{\text{ص}})^2 = \text{مجـ ص}^2 - \frac{(\text{مجـ ص})^2}{\text{ن}}$$

$$= ١٢٢٢ - \frac{(٩٦)^2}{٨} = ٧٠$$

وعليه فإنه يمكن التعويض في المعادلتين (١٥، ١٦) السابقتين للمجاميع السابقه لينتج الآتي :

$$٣٨ = ٣٤٫٨٧٥\,\hat{\text{ب}}_1 + ٣٢٫٢٥\,\hat{\text{ب}}_2 \longleftarrow (١٧)$$

$$١٠٩ = ٣٢٫٢٥\,\hat{\text{ب}}_1 + ٢٣١٫٥\,\hat{\text{ب}}_2 \longleftarrow (١٨)$$

بضرب المعادله (١٧) x (٣٢ر٢٥) وضرب المعادله (١٨) x (٣٤ر٨٧٥) ينتج الآتي :

$$١٢٢٥ر٥ = ١١٢٤ر٧١٨٧٥\ \hat{ب}_{١} + ١٠٤٠ر٠٦٢٥\ \hat{ب}_{٢} \longrightarrow (١٩)$$

$$٣٨٠١ر٣٧٥ = ١١٢٤ر٧١٨٧٥\ \hat{ب}_{١} + ٨٠٧٣ر٥٦٢٥\ \hat{ب}_{٢} \longrightarrow (٢٠)$$

بطرح المعادله (١٩) من المعاله (٢٠) ينتج الآتي :-

$$٢٥٧٥ر٨٧٥ = ٧٠٣٣ر٥\ \hat{ب}_{٢}$$

$$\hat{ب}_{٢} = ٢٥٧٥ر٨٧٥ \div ٧٠٣٣ر٥ = \boxed{٠ر٣٦٦٢٢٩} \longrightarrow (٢١)$$

بالتعويض في المعادله (١٧) عن قيمة $\hat{ب}_{٢}$ السابقه ينتج الآتي :

$$٣٨ = ٣٤ر٨٧٥\ \hat{ب}_{١} + ٣٢ر٢٥\ (٠ر٣٦٦٢٢٩)$$

$$٣٨ = ٣٤ر٨٧٥\ \hat{ب}_{١} + ١١ر٨١٠٨٨٥$$

$$٣٨ - ١١ر٨١٠٨٨٥ = ٣٤ر٨٧٥\ \hat{ب}_{١}$$

$$٢٦ر١٨٩١١٥ = ٣٤ر٨٧٥\ \hat{ب}_{١}$$

$$\hat{ب}_{١} = \boxed{٠ر٧٥٠٩٤٢} \longrightarrow (٢٢)$$

(٢) <u>لايجاد قيم $\hat{أ}$:-</u>

$$\hat{أ} = \bar{ص} - \hat{ب}_{١}\ \bar{س}_{١} - \hat{ب}_{٢}\ \bar{س}_{٢} \longrightarrow (٢٣)$$

حيث أن :-

$$\bar{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} = \frac{٩٦}{٨} = ١٢$$

$$\bar{\text{س}}_1 = \frac{\text{مجـ س}_1}{\text{ن}} = \frac{٤١}{٨} = ٥ر١٢٥$$

$$\bar{\text{س}}_2 = \frac{\text{مجـ س}_2}{\text{ن}} = \frac{١١٨}{٨} = ١٤ر٧٥$$

ومن العلاقه (٢١) السابقه يمكن إيجاد قيمة ($\hat{\text{أ}}$) كالآتي :-

أ = ١٢ - ٧٥٠٩٤٢ر (٥ر١٢٥) - ٣٦٦٢٢٩ر (١٤ر٧٥)

= ١٢ - ٣ر٨٤٨٥٧٨ - ٥ر٤٠١٨٧٨

= ١٢ - ٩ر٢٥٠٤٥٦

= $\boxed{\text{٢ر٧٤٩٥٤٤}}$ ← (٢٤)

وعلى ذلك فإن معادلة الإنحدار المتعدد تكون :-

$\boxed{\hat{\text{ص}} = \text{٢ر٧٤٩٥٤٤ + ٧٥٠٩٤٢ر س}_1 \text{ + ٣٦٦٢٢٩ر س}_2}$ ← (٢٥)

ثالثا : تقدير معالم نموذج الإنحدار المتعدد باستخدام معكوس المصفوفه كالآتى:-

يمكن وضع المعادلتين الطبيعيه الموجوده في العلاقه (٢ : ٧) السابقه في صوره مصفوفات كالآتي:-

$$[\text{مصفوفة الثوابت}] \quad = \quad [\text{مصفوفة المعالم}] \quad [\text{مصفوفة المعاملات}]$$

$$(\underline{\text{سَ}}\,\underline{\text{ص}}) \quad = \quad (\underline{\text{ث}}_{\text{ر}}) \quad (\underline{\text{سَ}}\,\underline{\text{س}})$$

$$\begin{bmatrix} \text{مجـ ص} \\ \text{مجـ س}_{١}\text{ص} \\ \text{مجـ س}_{٢}\text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{أ} \\ \text{ب}_{١} \\ \text{ب}_{٢} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{مجـ س}_{٢} & \text{مجـ س}_{١} & \text{ن} \\ \text{مجـ س}_{١}\text{س}_{٢} & \text{مجـ س}_{١}^{٢} & \text{مجـ س}_{١} \\ \text{مجـ س}_{٢}^{٢} & \text{مجـ س}_{١}\text{س}_{٢} & \text{مجـ س}_{٢} \end{bmatrix}$$

أي أن :

$$\begin{bmatrix} \text{مجـ ص} \\ \text{مجـ س}_{١}\text{ص} \\ \text{مجـ س}_{٢}\text{ص} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{مجـ س}_{٢} & \text{مجـ س}_{١} & \text{ن} \\ \text{مجـ س}_{١}\text{س}_{٢} & \text{مجـ س}_{١}^{٢} & \text{مجـ س}_{١} \\ \text{مجـ س}_{٢}^{٢} & \text{مجـ س}_{١}\text{س}_{٢} & \text{مجـ س}_{٢} \end{bmatrix}^{-١} = \begin{bmatrix} \text{أ} \\ \text{ب}_{١} \\ \text{ب}_{٢} \end{bmatrix}$$

أي أن :

$$(٨:٢) \qquad \boxed{\hat{\underline{\text{ث}}}_{\text{ر}} = (\underline{\text{سَ}}\,\underline{\text{س}})^{-١}\,(\underline{\text{سَ}}\,\underline{\text{ص}})}$$

ويمكن التعويض بالقيمة الرقميه في العلاقة (٨:٢) السابقه كالآتي :-

$$\begin{bmatrix} ٩٦ \\ ٥٣٠ \\ ١٥٢٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١١٨ & ٤١ & ٨ \\ ٦٣٧ & ٢٤٥ & ٤١ \\ ١٩٧٢ & ٦٣٧ & ١١٨ \end{bmatrix}^{-١} = \begin{bmatrix} \text{أ} \\ \text{ب}_{١} \\ \text{ب}_{٢} \end{bmatrix}$$

(٩:٢)

ويمكن إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات (سَ س)$^{-1}$ الموجوده في العلاقة (٩:٢) السابقه أما باستخدام الأساليب المعروفه لايجاد معكوس المصفوفه أو باستخدام الحاسب الآلي، ويفرض أن معكوس مصفوفة المعاملات باستخدام الحاسب الآلي كانت كالآتي :-

(سَ س)$^{-1}$ = $\frac{١}{٥٦٢٦٨}$

٧٧٣٧١	-٥٦٨٦	-٢٧٩٣
-٥٦٨٦	١٨٥٢	-٢٥٨
-٢٧٩٣	-٢٥٨	٢٧٩

=

١ر٣٧٥٠٤٤٤٣	-٠ر١٠١٠٥٢١١	-٠ر٠٤٩٦٣٧٤٥
-٠ر١٠١٠٥٢١١	٠ر٠٣٢٩١٣٩١	-٠ر٠٠٤٥٨٥٢
-٠ر٠٤٩٦٣٧٤٥	-٠ر٠٠٤٥٨٥٢	٠ر٠٠٤٩٥٨٤١

اي أن :

$\boxed{\text{ثَ}^{\wedge}_{ر} = (\text{سَ س})^{-1} (\text{سَ ص})}$ من العلاقة (٨:٢) السابقه :-

$\begin{bmatrix} \hat{أ} \\ \hat{ب}_1 \\ \hat{ب}_2 \end{bmatrix}$ =

١ر٣٧٥٠٤٤٤٣	-٠ر١٠١٠٥٢١١	-٠ر٠٤٩٦٣٧٤٥
-٠ر١٠١٠٥٢١١	٠ر٠٣٢٩١٣٩١	-٠ر٠٠٤٥٨٥٢
-٠ر٠٤٩٦٣٧٤٥	-٠ر٠٠٤٥٨٥٢	٠ر٠٠٤٩٥٨٤١

$\begin{bmatrix} ٩٦ \\ ٥٣٠ \\ ١٥٢٥ \end{bmatrix}$

$\hat{أ}$ = ١ر٣٧٥٠٤٤٤٣ X ٩٦ - ٠ر١٠١٠٥٢١١ X ٥٣٠ - ٠ر٠٤٩٦٣٧٤٥ X ١٥٢٥ = ٢ر٧٤٩٥

$\hat{ب}_1$ = -٠ر١٠١٠٥٢١١ X ٩٦ + ٠ر٠٣٢٩١٣٩١ X ٥٣٠ - ٠ر٠٠٤٥٨٥٢ X ١٥٢٥ = ٠ر٧٥٠٩٤

$\hat{ب}_2$ = -٠ر٠٤٩٦٣٧٤٥ X ٩٦ - ٠ر٠٠٤٥٨٥٢ X ٥٣٠ + ٠ر٠٠٤٩٥٨٤١ X ١٥٢٥ = ٠ر٣٦٦٢٢

وعلى ذلك فإن معادلة الإنحدار المتعدد تكون :-

$\boxed{\hat{ص} = ٢ر٧٤٩٥ + ٠ر٧٥٠٩٤\,س_1 + ٠ر٣٦٦٢٢\,س_2}$ ← (٢٦)

ملخص القوانين والعلاقات

يمكن تقدير معادلة الإنحــدار المتعدد(تقدير أ̂ ، ب̂$_1$ ، ب̂$_2$) على الصــورة الآتيه:-

$$\boxed{\text{ص̂} = \text{أ̂} + \text{ب̂}_1\,\text{س}_1 + \text{ب̂}_2\,\text{س}_2}$$

بثلاث طرق هي:-

اولا : الحل الآنى للمعادلات الطبيعية الآتية: -

مجـ ص = ن أ̂ + ب̂$_1$ مجـ س$_1$ + ب̂$_2$ مجـ س$_2$

مجـ س$_1$ ص = أ̂ مجـ س$_1$ + ب̂$_1$ مجـ س$^2_1$ + ب̂$_2$ مجـ س$_1$ س$_2$

مجـ س$_2$ ص = أ̂ مجـ س$_2$ + ب̂$_1$ مجـ س$_1$ س$_2$ + ب̂$_2$ مجـ س$^2_2$

ثانيا : الحل بالطريقة المختصرة : -

١- إيجاد المجاميع السته الآتية :-

١- مجـ (س$_1$ - س̄$_1$) (ص - ص̄) = مجـ س$_1$ ص - $\dfrac{\text{مجـ س}_1\ \text{مجـ ص}}{\text{ن}}$

٢- مجـ (س$_2$ - س$_2$) (ص - ص) - مجـ س$_2$ ص - $\dfrac{\text{مجـ س}_2\ \text{مجـ ص}}{\text{ن}}$

$$٣- \text{مجـ} (س_١ - \bar{س}_١)^٢ = \text{مجـ } س_١^٢ - \frac{(\text{مجـ } س_١)^٢}{ن}$$

$$٤- \text{مجـ} (س_٢ - \bar{س}_٢)^٢ = \text{مجـ } س_٢^٢ - \frac{(\text{مجـ } س_٢)^٢}{ن}$$

$$٥- \text{مجـ} (س_١ - \bar{س}_١)(س_٢ - \bar{س}_٢) = \text{مجـ } س_١ س_٢ - \frac{\text{مجـ } س_١ \text{ مجـ } س_٢}{ن}$$

$$٦- \text{مجـ} (ص - \bar{ص})^٢ = \text{مجـ } ص^٢ - \frac{(\text{مجـ } ص)^٢}{ن}$$

٢- بحل المعادلتين الآتيتين معًا يتم إيجاد ($\hat{ب}_١$، $\hat{ب}_٢$) :-

$$\text{مجـ} (س_١ - \bar{س}_١)(ص - \bar{ص}) = \hat{ب}_١ \text{ مجـ} (س_١ - \bar{س}_١)^٢ + \hat{ب}_٢ \text{ مجـ} (س_١ - \bar{س}_١)(س_٢ - \bar{س}_٢)$$

$$\text{مجـ} (س_٢ - \bar{س}_٢)(ص - \bar{ص}) = \hat{ب}_١ \text{ مجـ} (س_١ - \bar{س}_١)(س_٢ - \bar{س}_٢) + \hat{ب}_٢ \text{ مجـ}(س_٢ - \bar{س}_٢)^٢$$

٣- $\hat{أ} = \bar{ص} - \hat{ب}_١ \bar{س}_١ - \hat{ب}_٢ \bar{س}_٢$

حيث :

$$\bar{ص} = \frac{\text{مجـ } ص}{ن} ، \bar{س}_١ = \frac{\text{مجـ } س_١}{ن} ، \bar{س}_٢ = \frac{\text{مجـ } س_٢}{ن}$$

ثالثا : الحل باستخدام المصفوفات :-

$$\underline{\hat{\text{ب}}} = (\underline{\text{س}}'\,\underline{\text{س}})^{-1}\,(\underline{\text{س}}'\,\underline{\text{ص}})$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\text{أ}} \\ \hat{\text{ب}}_1 \\ \hat{\text{ب}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ن} & \text{مجـ س}_1 & \text{مجـ س}_2 \\ \text{مجـ س}_1 & \text{مجـ س}_1^2 & \text{مجـ س}_1\text{س}_2 \\ \text{مجـ س}_2 & \text{مجـ س}_1\text{س}_2 & \text{مجـ س}_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \text{مجـ ص} \\ \text{مجـ س}_1\text{ص} \\ \text{مجـ س}_2\text{ص} \end{bmatrix}$$

أو

$$\begin{bmatrix} \text{مصفوفة} \\ \text{معالم الانحدار} \\ \text{المقدره} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{معكوس} \\ \text{مصفوفة} \\ \text{المعاملات} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{مصفوفة} \\ \text{الثوابت} \end{bmatrix}$$

* * * * *

تطبيق (١) :-

بالآتي يمثل الاتفاق على اللحوم المستورده (ص) والسعر ($س_١$) ومتوسط الدخل ($س_٢$) بعشرات الجنيهات بالأسعار المثبته لستة فترات زمنيه متتاليه :-

ص :	١	٢	٣	٤	٣	٥
$س_١$:	١	١	٢	٢	٣	٣
$س_٢$:	١	٢	٣	٣	٤	٥

والمطلوب تقدير معادلة الإنحدار الخطي المتعدد :-

الحـل :

ص	$س_١$	$س_٢$	ص $س_١$	ص $س_٢$	$س_١$ $س_٢$	$ص^٢$	$س^٢_١$	$س^٢_٢$
١	١	١	١	١	١	١	١	١
٢	١	٢	٢	٤	٢	٤	١	٤
٣	٢	٣	٦	٩	٦	٩	٤	٩
٤	٢	٣	٨	١٢	٦	١٦	٤	٩
٣	٣	٤	٩	١٢	١٢	٩	٩	١٦
٥	٣	٥	١٥	٢٥	١٥	٢٥	٩	٢٥
١٨	١٢	١٨	٤١	٦٣	٤٢	٦٤	٢٨	٦٤

يلاحظ أن حجم العينه (ن) =٦

١- نوجد المجاميع السته السابقه كالأتيه :-

$$١- \text{مجـ}\,(س_١-\bar{س}_١)\,(ص-\bar{ص}) = \text{مجـ}\,س_١\,ص - \frac{\text{مجـ}\,س_١\ \text{مجـ}\,ص}{ن}$$

$$= ٤١ - \frac{١٨ \times ١٢}{٦} = ٥$$

٢- $\text{مجـ}\,(\text{س}_{٢} - \bar{\text{س}}_{٢})\,(\text{ص} - \bar{\text{ص}}) = \text{مجـ}\,\text{س}_{٢}\,\text{ص} - \dfrac{\text{مجـ}\,\text{س}_{٢}\ \text{مجـ}\,\text{ص}}{\text{ن}}$

$= ٦٣ - \dfrac{١٨ \times ١٨}{٦} = ٩$

٣- $\text{مجـ}\,(\text{س}_{١} - \bar{\text{س}}_{١})^{٢} = \text{مجـ}\,\text{س}_{١}^{٢} - \dfrac{(\text{مجـ}\,\text{س}_{١})^{٢}}{\text{ن}}$

$= ٢٨ - \dfrac{(١٢)^{٢}}{٦} = ٤$

٤- $\text{مجـ}\,(\text{س}_{٢} - \bar{\text{س}}_{٢})^{٢} = \text{مجـ}\,\text{س}_{٢}^{٢} - \dfrac{(\text{مجـ}\,\text{س}_{٢})^{٢}}{\text{ن}}$

$= ٦٤ - \dfrac{(١٨)^{٢}}{٦} = ١٠$

٥- $\text{مجـ}\,(\text{س}_{١} - \bar{\text{س}}_{١}).(\text{س}_{٢} - \bar{\text{س}}_{٢}) = \text{مجـ}\,\text{س}_{١}\,\text{س}_{٢} - \dfrac{\text{مجـ}\,\text{س}_{١}\ \text{مجـ}\,\text{س}_{٢}}{\text{ن}}$

$= ٤٢ - \dfrac{١٨ \times ١٢}{٦} = ٦$

٦- $\text{مجـ}\,(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^{٢} = \text{مجـ}\,\text{ص}^{٢} - \dfrac{(\text{مجـ}\,\text{ص})^{٢}}{\text{ن}}$

$= ٦٤ - \dfrac{(٩٦)^{٢}}{٦} = ١٠$

٢-لإيجاد ($\hat{\text{ب}}_{١}$ ، $\hat{\text{ب}}_{٢}$) نحل المعادلتين الآتيتين معًا :-

$$\text{مجـ}\,(\text{س}_{١}-\bar{\text{س}}_{١})\,(\text{ص}-\bar{\text{ص}}) = \hat{\text{ب}}_{١}\,\text{مجـ}\,(\text{س}_{١}-\text{س}_{١})^{٢}$$

$$+\ \hat{\text{ب}}_{٢}\,\text{مجـ}\,(\text{س}_{١}-\text{س}_{١})\,(\text{س}_{٢}-\text{س}_{٢})$$

$$\text{مجـ}\,(\text{س}_{٢}-\bar{\text{س}}_{٢})\,(\text{ص}-\bar{\text{ص}}) = \hat{\text{ب}}_{١}\,\text{مجـ}\,(\text{س}_{١}-\bar{\text{س}}_{١})\,(\text{س}_{٢}-\bar{\text{س}}_{٢})$$

$$+\ \hat{\text{ب}}_{٢}\,\text{مجـ}\,(\text{س}_{٢}-\text{س}_{٢})^{٢}$$

$$٥ = ٤\hat{\text{ب}}_{١} + ٦\hat{\text{ب}}_{٢} \qquad (١)$$

$$٩ = ٦\hat{\text{ب}}_{١} + ١٠\hat{\text{ب}}_{٢} \qquad (٢)$$

بضرب المعادله (١) x (٦) وضرب المعادله (٢) x (٤) ينتج الآتي :-

$$٣٠ = ٢٤\hat{\text{ب}}_{١} + ٣٦\hat{\text{ب}}_{٢} \qquad (٣)$$

$$٣٦ = ٢٤\hat{\text{ب}}_{١} + ٤٠\hat{\text{ب}}_{٢} \qquad (٤)$$

بطرح (٣) من (٤) ينتج الآتي:

$$٦ = ٤\hat{\text{ب}}_{٢}$$

$$\therefore\ \hat{\text{ب}}_{٢} = \frac{٦}{٤} = \boxed{١,٥}$$

بالتعويض في المعادله (١) عن $\hat{\text{ب}}_{٢}$ = ١,٥ ينتج

$$٥ = ٤\hat{\text{ب}}_{١} + ٦\ (١,٥)$$

$$-٩ + ٥ = ٤\hat{\text{ب}}_{١}$$

-٤ = ٤ ب̂$_1$

∴ ب̂$_1$ = $\frac{-٤}{٤}$ = $\boxed{-١}$

٣-لإيجاد قيمة (أ̂) :-

ص̄ = $\frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}$ = $\frac{١٨}{٦}$ = ٣

س̄$_1$ = $\frac{\text{مجـ س}_1}{\text{ن}}$ = $\frac{١٢}{٦}$ = ٢

س̄$_2$ = $\frac{\text{مجـ س}_2}{\text{ن}}$ = $\frac{١٨}{٦}$ = ٣

أ̂ = ص̄ - ب̂$_1$ س̄$_1$ - ب̂$_2$ س̄$_2$

= ٣ - (-١) (٢) - ١٫٥ (٣)

= ٣ + ٢ - ٤٫٥

= ٥ - ٤٫٥ = $\boxed{٠٫٥}$

معادلة الانحدار المتعدد على الصورة

ص̂ = أ̂ + ب̂$_1$ س$_1$ + ب̂$_2$ س$_2$ هي:

ص̂ = ٠٫٥ - س$_1$ + ١٫٥ س$_2$

تطبيق (٢):-

إذا علمت أنه لعينه عشوائية من (ن = ٦) كان :

مجـ ص = ١٨   مجـ $س_١$ = ١٢   مجـ $س_٢$ = ١٨

مجـ $س_١$ص = ٤١   مجـ $س_٢$ ص= ٦٣   مجـ $س_١ س_٢$ = ٤٢

مجـ $ص^٢$ = ٦٤   مجـ $س_١^٢$ = ٢٨   مجـ $س_٢^٢$ = ٦٤

المطلوب : باستخدام أسلوب المصفوفات تقدير معادلة الإنحدار المتعدد على الصورة $\hat{ص} = \hat{أ} + \hat{ب}_١ س_١ + \hat{ب}_٢ س_٢$

الحـل :

<u>أولاً : مصفوفة المعاملات</u>-

$$(\underline{س}' \underline{س}) = \begin{bmatrix} \text{ن} & \text{مجـ }س_١ & \text{مجـ }س_٢ \\ \text{مجـ }س_١ & \text{مجـ }س_١^٢ & \text{مجـ }س_١ س_٢ \\ \text{مجـ }س_٢ & \text{مجـ }س_١ س_٢ & \text{مجـ }س_٢^٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٦ & ١٢ & ١٨ \\ ١٢ & ٢٨ & ٤٢ \\ ١٨ & ٤٢ & ٦٤ \end{bmatrix}$$

ثانيا : إيجاد معكوس المصفوفة (سَ س) :-

١ - قيمة المحدد العام= ٦(٢٨×٦٤-٤٢×٤٢)-١٢(١٢×٦٤-١٨×٤٢)+١٨(١٢×٤٢-١٨×٢٨)

= ٦(١٩٧٢ - ١٧٦٤) -١٢(٧٦٨ - ٧٥٦) + ١٨(٥٠٤ - ٥٠٤)

= ٦(٢٨) -١٢(١٢) + ١٨(٠)

= ١٦٨ - ١٤٤ = ٢٤

٢- مصفوفة المرافقات =

$$\begin{bmatrix} +(\text{٢٨}) & -(\text{١٢}) & +(\text{٠}) \\ -(\text{١٢}) & +(\text{٦٠}) & -(\text{٣٦}) \\ +(\text{٠}) & -(\text{٣٦}) & +(\text{٢٤}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{٢٨} & -\text{١٢} & \text{٠} \\ -\text{١٢} & \text{٦٠} & -\text{٣٦} \\ \text{٠} & -\text{٣٦} & \text{٢٤} \end{bmatrix}$$

٣- $(\text{سَ س})^{-1} = \frac{\text{١}}{\text{٢٤}} \begin{bmatrix} \text{٢٨} & -\text{١٢} & \text{٠} \\ -\text{١٢} & \text{٦٠} & -\text{٣٦} \\ \text{٠} & -\text{٣٦} & \text{٢٤} \end{bmatrix}$

ثالثاً: $\boxed{\hat{\text{ب}} = (\text{س}'\text{س})^{-1}\,(\text{س}'\text{ص})}$

$$\begin{bmatrix} \hat{\text{أ}} \\ \hat{\text{ب}}_1 \\ \hat{\text{ب}}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 8 & -12 & 0 \\ -12 & 60 & -36 \\ 0 & -36 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 41 \\ 63 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{مجـ ص} \\ \leftarrow \text{مجـ س}_1\text{ ص} \\ \leftarrow \text{مجـ س}_2\text{ ص} \end{array}$$

$$\hat{\text{أ}} = \frac{28 \times 18 - 12 \times 41 + 0 \times 63}{24} = \frac{12}{24} = 0.5$$

$$\hat{\text{ب}}_1 = \frac{12 \times 18 + 60 \times 41 - 36 \times 63}{24} = \frac{-24}{24} = -1$$

$$\hat{\text{ب}}_2 = \frac{0 \times 18 + -36 \times 41 + 41 \times 63}{24} = \frac{36}{24} = 1.5$$

معادلة الإنحدار المتعدد هي :-

$$\boxed{\hat{\text{ص}} = 0.5 - \text{س}_1 + 1.5\,\text{س}_2}$$

* * * *

٢- تقييم التقديرات
Evaluation of Estimates

بعد تقدير معالم نموذج الإنحدار المتعدد لا بد من تقييمه ، والتقيم يتم طبقًا للمعايير الآتية :-

<u>أولاً : التقييم طبقًا لمعايير الإقتصاد المسبق :-</u>
<u>Economic "Apriori" Criteria</u>

يمكن تقييم النموذج المقدر للمثال العام السابق الخاص بقيمة المبيعات من الشاي والموجود في العلاقة (٢٦) السابقه حيث كان:

$\hat{\text{ص}}$ = ٧٤٩٥ر٢ + ٧٥٩٤ر س$_1$ + ٣٦٦٢٢ر س$_2$ (٢٦)

تفترض النظرية الإقتصادية الآتي :-

١- قيمة المقدار الثابت ($\hat{\text{أ}}$) لا بد أن تكون > صفرًا، ذلك لإن قيمة المبيعات من أي سلعة لا يمكن ان تكون سالبه بأي حل ، وحيث أن المقدار (أ = ٧٤٩٥ر٢)، إذن حجم وأشارة المقدار الثابت لا يخالف إفتراض النظرية الإقتصادية .

٢- المعامل ($\hat{\text{ب}}_1$) لا بد أن تكون قيمته > صفرًا، ذلك لإنه من المشاهد من الواقع العملي أن تكون هناك علاقة طردية بين حجم المنفق على الإعلان وحجم المبيعات، وحيث أن المقدار ($\hat{\text{ب}}_1$= ٧٥٩٤ر) ، إذن حجم وأشارة المعامل ($\hat{\text{ب}}_1$) لا يخالف إفتراضات النظرية الإقتصادية ولا المشاهد من الواقع العملي .

٣- المعامل ($\hat{ب}_٢$) لا بد أن تكون قيمته > صفرًا، وذلك لأنه من الخبره السابقة والمشاهده من الواقع العملي لا بد أن تكون هناك علاقة طردية بين عدد منافذ التوزيع وحجم المبيعات، وحيث أن قيمة المعلمه ($\hat{ب}_٢$= ٣٦٦٢٢ر) إذن فهي لا تخالف إفتراضات النظرية الإقتصادية ولا المشاهد من الواقع العملي .

وعلى ذلك فإنه يمكن القول أن النموذج المقدر في العلاقة (٢٦) السابق لا يخالف متطلبات النظرية الإقتصادية ولا المعيار الإقتصاد المسبق وخبره الباحث والمشاهد من الواقع العملي .

ثانيا : التقييم طبقا لمعايير النظرية الإحصائية :- Statistical Criteria

يأتي دور الإختبارات الإحصائية بعد إجتياز النموذج لإختبار المعيار الإقتصادي المسبق، والإختبارات الإحصائية تتم على (٣) ثلاث مراحل هي :-

١- تحديد مقدرة النموذج علي تفسير التغيرات في الظاهرة محل القياس:-

ويتم ذلك عن طريق إيجاد معامل التحديد ($ر^٢$) Coefficient of Determination كمقياس لدقة التوفيق ، وكلما إرتفعت قيمته كان ذلك دليلاً على قوة العلاقة المستخدمه في تفسير المتغير التابع، ويمكن إيجاد معامل التحديد ($ر^٢$) من العلاقة الآتية :-

$$ر^٢ = \frac{\text{التغير المفسر}}{\text{التغير الكلي}}$$

$$= \frac{\text{م.م.ر}}{\text{م.م.ك}}$$

وبالنسبة للمثال العام السابق الخلص بمبيعات الشاي حيث كانت معادلة الإنحدار المتعدد هي :-

$$\hat{ص} = ٢٫٧٤٩٥ + ٧٥٠٩٤ر س_١ + ٣٦٦٢٢ر س_٢$$

$$مجـ (ص-\bar{ص})^٢ = ٧٠ ، \quad مجـ (س_١-\bar{س}_١)(ص-\bar{ص}) = ٣٨$$

$$مجـ (س_٢ - \bar{س}_٢)(ص-\bar{ص}) = ١٠٩ ، ن = ٨$$

فإنه يمكن إيجاد معامل التحديد المتعدد كالآتي :-

١- التغير الكلي (م.م.ك) = $(ص-\bar{ص})^٢$

= ٧٠

٢- التغير المفسر (م.م.ر) = $\hat{ب}_١$ مجـ $(س_١-\bar{س}_١)(ص-\bar{ص})$

+ $ب_٢$ مجـ $(س_٢-\bar{س}_٢)(ص-\bar{ص})$

= ٧٥٠٩٤ر (٣٨) + ٣٦٦٢٢ر (١٠٩)

= ٦٨٫٤٥٣٧

٣- التغير العشوائي (م.م.ي) = ٧٠ - ٦٨٫٤٥٣٧

= ١٫٥٤٦٣

٤- $ر^٢$ = ٦٨٫٤٥٣٧ ÷ ٧٠

= ٩٧٧٩ر

أي إن (٩٧٫٧٩٪) من التغيرات التي تحدث في حجم المبيعات (ص) ترجع إلى كل من حجم الانفاق على الدعاية ($س_١$) وعدد منافذ التوزيع ($س_٢$) في نفس الاتجاه وأن (٢٫٢١٪) من هذه التغيرات ترجع إلى عوامل أخرى غير مقيسة، أي أن النموذج له قوة تفسيرية عاليه .

- ويمكن إيجاد معامل التحديد المتعدد (ر٢) من العلاقة الآتية :-

$$ر^{2} = 1 - \frac{\text{التغير الغير مفسر}}{\text{التغير الكلي}}$$

$$= 1 - \frac{\text{م.م.ي}}{\text{م.م.ك}}$$

$$= 1 - \frac{1٫5463}{70}$$

$$= 1 - 0٫0209 = 0٫9779$$

٢- إختبار معنوية علاقة الإنحدار المقدرة ككل :-

Testing the Overall Significance of the Regression

ويتم ذلك كما سبق أن بينا في العلاقة (١ : ١١) الموجوده في الفصل الأول .

ويمكن تطبيق هذا الإختبار على المثال العام الخاص بمبيعات الشاي السابق كالآتي :-

(١) الفرض الأصلي أ : $ب_{ر}$ = صفرا   ر = ١، ٢، ٣

(٢) الفرض البديل $أ_{1}$: $\hat{ب}_{ر} \neq$ صفراً لواحدة على الأقل من قيم ر
ر = ١، ٢، ٣

(٣) مستوى المعنوية : (α = ٥٪ فرضا).

(٤) المقياس الإحصائي المناسب : توزيع (ف)

ويمكن استخدام جدول تحليل التباين كالآتي :

(٥) جدول تحليل التباين :-

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات (التباين)	ف*
المفسر (م.م.ر)	٦٨ر٤٥٣٧	ك - ١ = ٢	٦٨ر٤٥٣٧ / ٢ = ٣٢ر٦٨	= ١٠٥ر٦٧
البواقي (م.م.ي)	١ر٥٤٦٣	ن - ك = ٥	١ر٥٤٦٣ / ٢ = ٩٣٦ ٣ر = σ^2	
الكلي (م.م.ك)	٧٠	ن - ١ = ٧		

* ويلاحظ أن قيمة (ف) النظرية عند مستوى معنوية (α =٥٪) ودرجات جريه (٢، ٥) = ٥ر٧٩ .

(٦) وحيث أن (ف*) المحسوبه > ف النظريه.

يتم رفض الفرض الأصلي وقبول الفرض البديل عند مستوى معنوية (α =٥٪) .

أي أن علاقة الإنحدار المقدر ةجوهرية ككل عند مستوى (α =٥٪)

٣- إختبار معنوية كل متغير تفسيرى على حدة: -

ويتم ذلك كما سبق أن بينا في العلاقة (١ : ١٢) الموجوده في الفصل الأول.

وبالنسبة للمثال العام السابق الخاص بمبيعات الشاني حيث كان معكوس مصفوفه المعاملات $(\text{س}'\text{س})^{-1}$ =

$$\begin{bmatrix} \text{ر٠٤٩٦٣٧٤٥-} & \text{ر١٠١٠٥٢١١-} & \text{١ر٣٧٥٠٤٤٤٣} \\ \text{ر٠٠٤٥٨٥٢-} & \text{ر٠٣٢٩١٣٩١} & \text{ر١٠١٠٥٢١١-} \\ \text{ر٠٠٤٩٥٨٤١} & \text{ر٠٠٤٥٨٥٢-} & \text{ر٠٤٩٦٣٧٤٥-} \end{bmatrix}$$

فإنه يمكن تطبيق الإختبار السابق كالآتي :

(١) تباين التقدير $\sigma^2 = \dfrac{\text{البواقي}}{\text{ن - ك}} = \dfrac{\text{١ر٥٤٦٣}}{\text{٥}} = \text{ر٠٣٩٢٦}$

(٢) أ٢٢: العنصر الثاني الموجود على القطر الرئيسي في المصفوفة $(\underline{\text{س}'\text{س}})^{-1}$ السابقة.

= ر٠٣٢٩١٣٩١

أ٣٣: العنصر الثالث الموجود على القطر الرئيسي في المصفوفة $(\underline{\text{س}'\text{س}})^{-1}$ السابقة..

= ر٠٠٤٩٥٨٤١

(٣) $ع_{\hat{ب}_{١}} = \sqrt{\sigma^{٢} \times أ_{٢٢}}$

$= \sqrt{٠ر٣٩٢٦ \times ٠ر٣٢٩١٣٩١} = ٠ر١٠٠٨٩$

(٤) $ع_{\hat{ب}_{٢}} = \sqrt{\sigma^{٢} \times أ_{٣٣}}$

$= \sqrt{٠ر٣٠٩٢٦ \times ٠ر٠٠٤٩٥٨٤١} = ٠ر٠٣٩١٥$

أولاً : إختبار معنوية المتغير التفسيرى ($س_{١}$)

١- الفرض الاصلي أ : $\hat{ب}_{١}$ = صفراً.

٢- الفرض البديل $أ_{١}$: $\hat{ب}_{١} \neq$ صفراً.

٣- مستوى المعنوية α =٥٪.

٤- المقياس الاحصائي المناسب: توزيع (ت)

$$ت^{*} = \frac{\hat{ب}_{١}}{ع_{\hat{ب}_{١}}}$$

٥- $$ت^{*}_{١} = \frac{٠ر٧٥٠٩٤}{٠ر١٠٠٨٩} = ٧ر٤٤$$

٦- حيث أن قيمة $ت^*_1$ المحسوبه > (ت) النظرية[1] عند مستوى معنوية (α = ٥٪).

∴ يتم رفض الفرض الأصلي وقبول الفرض البديل أي أن المتغير التفسيري ($س_1$) يساهم مساهمة جوهرية في العلاقة المقدرة .

ثانياً : إختبار معنوية المتغير التفسيرى ($س_2$)

١- الفرض الأصلي أ : $ب_2$ = صفراً.

٢- الفرض البديل $أ_1$: $\hat{ب}_2 \neq$ صفراً.

٣- مستوى المعنوية : (α = ٥٪).

٤- المقياس الإحصائي المناسب: توزيع (ت).

$$ت^* = \frac{\hat{ب}_2}{ع_{\hat{ب}_2}}$$

$$٥- ت^*_2 = \frac{٣٦٦٢٢ر}{٠٣٩١٥ر}$$

$$= ٩ر٣٥$$

٦- حيث أن قيمة $ت^*_2$ المحسوبه > (ت) النظرية عند مستوى معنوية (α = ٥٪).

∴ يتم رفض الفرض الأصلي وقبول الفرض البديل أي أن المتغير التفسيري ($س_2$) يساهم مساهمة جوهرية في العلاقة المقدرة .

(١) قيمة "ت" النظرية عند مستوى معنوية (α = ٥٪) وبدرجات حريه (٥) = ٢ر٥٧١

ملاحظة :

في حالة عدم وجود المصفوفه $(\text{سَ س})^{-1}$ فإن يمكن إستنتاج قيم $\text{أ}_{٢٢}$، $\text{أ}_{٣٣}$ كما يلي:

$$\text{أ}_{٢٢} = \frac{١}{\text{مجـ}(\text{س}_١ - \bar{\text{س}}_١)^٢ - \dfrac{[\text{مجـ}(\text{س}_١ - \bar{\text{س}}_١)(\text{س}_٢ - \bar{\text{س}}_٢)]^٢}{\text{مجـ}(\text{س}_٢ - \bar{\text{س}}_٢)^٢}}$$

$$= \frac{١}{\text{٣٤ر٨٧٥} - \dfrac{(\text{٣٢ر٢٥})^٢}{\text{٢٣١ر٥}}}$$

$$= \frac{١}{\text{٣٤ر٨٧٥} - \text{٤ر٤٩٢٧}}$$

$$= \frac{١}{\text{٣٠ر٣٨٢٣}} = \text{ر٠٣٢٩١٣}$$

$$\text{أ}_{٣٣} = \frac{١}{\text{مجـ}(\text{س}_٢ - \bar{\text{س}}_٢)^٢ - \dfrac{[\text{مجـ}(\text{س}_١ - \bar{\text{س}}_١)(\text{س}_٢ - \bar{\text{س}}_٢)]^٢}{\text{مجـ}(\text{س}_١ - \bar{\text{س}}_١)^٢}}$$

$$= \frac{١}{\text{٢٣١ر٥} - \dfrac{(\text{٣٢ر٢٥})^٢}{\text{٣٤ر٨٧٥}}}$$

$$= \frac{١}{\text{٢٠١ر٦٧٧٤}} = \text{ر٠٠٤٩٥٨}$$

ملخص القوانين والعلاقات
الإختبارات الإحصائية

لا بد من إيجاد الأتي :-

١- التغير الكلي (م.م.ك)= مجـ (ص-ص̄)^{2}

٢- التغير المفسر (م.م.ر)= ب̂$_{1}$ مجـ (س$_{1}$-س̄$_{1}$) (ص-ص̄)
+ب̂$_{2}$ مجـ (س$_{2}$ س̄$_{2}$) (ص-ص̄)

٣- التغير العشوائي أو البواقي (م.م.ي)= م.م.ك - م.م.ر

أولاً : إختبارات المعنوية الإحصائية:-

عبارة عن نوعين من الإختبارات هما :-

١- إختبارا جوهرية النموذج المقدر ككل :-

(١) الفرض الأصلي أ. : ب̂$_{ر}$ = صفراً ر = ٣،٢:١

(٢) الفرض البديل أ$_{1}$: ب̂$_{ر}$ $\neq$ صفراً لواحدة على الأقل من قيم ر
ر = ٣،٢،١

(٣) مستوى المعنوية : (α= ٥٪ فرضاً).

(٤) المقياس الإحصائي المناسب : توزيع (ف)

٥ - جدول تحليل التباين :

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحريه	متوسط المربعات التباين	ف*
المفسر	م.م.ر	ك-١=٢	م.م.ر÷٢	(م.م.ر)÷٢ / σ^2
البواقي	م.م.ي	ن - ك	م.م.ي / ن - ك σ^2	
الكلي	م.م.ك	ن - ١		

٦ فإذا كانت النسبه (ف*) > قيمة (ف) النظريه عند مستوى المعنويه المقرر وبدرجات حريه (ك- ١)،(ن - ك) فيتم رفض الفرض الاصلي وقبول الفرض البديل، أي أن النموذج المقدرة معنويًا ككل والعكس صحيح.

٢ - إختبار جوهرية كل متغير مفسر علي حدة

لابد من إيجاد القيم الآتية أولاً :

١ - $أ_{رر}$: $أ_{٢٢}$ ، $أ_{٣٣}$ وهما ثاني وثالث قيمة على القطر الرئيسي في المصفوفه $(\underline{س}'\underline{س})^{-1}$، وفي حالة عدم وجود المصفوفه فإن:

$$أ_{٢٢} = \frac{١}{\text{مجـ}(س_١ - \bar{س}_١)^٢ - \dfrac{\{\text{مجـ}(س_١ - \bar{س}_١)(س_٢ - \bar{س}_٢)\}^٢}{\text{مجـ}(س_٢ - \bar{س}_٢)^٢}}$$

$$أ_{٣٣} = \frac{١}{\text{مجـ}(س_٢ - \bar{س}_٢)^٢ - \dfrac{\{\text{مجـ}(س_١ - \bar{س}_١)(س_٢ - \bar{س}_٢)\}^٢}{\text{مجـ}(س_١ - \bar{س}_١)^٢}}$$

٢- σ^{2} : تباين التقدير أو تباين المعادله

$$= \frac{\text{مجـ مربعات الخطا}}{\text{ن - ك}} = \frac{\text{م.م.خ ك}}{\text{ن - ك}}$$

ويتم الحصول عليه مباشرة من جدول تحليل التباين.

٣- $ع_{\hat{ب}_{١}}$: الخطأ المعياري $(\hat{ب}_{١})$= $\sqrt{\sigma^{2} \times أ_{٢٢}}$

٤- $ع_{\hat{ب}_{٢}}$: الخطأ المعياري $(\hat{ب}_{٢})$= $\sqrt{\sigma^{2} \times أ_{٣٣}}$

الإختبارات:

١- الفرض الأصلي $أ_{.}$: $\hat{ب}_{ر}$ = صفراً.

٢- الفرض البديل $أ_{١}$: $\hat{ب}_{ر} \neq$ صفراً.

٣- مســـتوى المعنـــويه : (α = ٥٪) فرضاً.

٤- المقياس الإحصائي المناسب : توزيع (ت)

$$ت^{*} = \frac{\hat{ب}_{ر}}{ع_{\hat{ب}_{ر}}}$$

٥- إجراء العمليات الحسابية.

٦- إذا كانت النسبه (ت*) المحسوبه > قيم (ت) النظريه عند مستوى المعنويه المقرر وبدرجات حريه (ك- ١)،(ن - ك) فيتم رفض الفرض الاصلي وقبول الفرض البديل،أي أن المتغير(س ر) جوهريًا إحصائيًا.

ثانيًا: إيجاد القدره التفسيريه للنموذج :-

معامل التحديد المتعدد (ر٢)

$$ر^2 = \frac{\text{التغير المفسر}}{\text{التغير الكلي}}$$

$$= \frac{\text{م.م.ر}}{\text{م.م.ك}}$$

$$ر^2 = 1 - \frac{\text{التغير الغير مفسر}}{\text{التغير الكلي}}$$

$$= 1 - \frac{\text{م.م.ي}}{\text{م.م.ك}}$$

ومعامل التحديد المتعدد (ر٢) يبين النسبة المئوية للتغير في المتغير التابع (ص) الناتجه عن التغيرات في كل من (س١، س٢).

تطبيق (٣) :

قدرت معادلة إنحدار متعدد لعينه عشوائية من (٨) أفراد لتقدير العلاقة بين الإنفاق على الطعام (ص) والدخل (س$_1$)، والسعر (س$_2$) فكانت : -

صَ^ = ١٥ر٦ + ٣١٥ر س$_1$ − ٣٢٧ر س$_2$

وكان :

مجـ (س$_1$ − سَ$_1$) (ص − صَ) = ٣٠   مجـ (س$_2$ − سَ$_2$) (ص − صَ) = ٣٠

مجـ (س$_1$ − سَ$_1$) (س$_2$ − سَ$_2$) = −٣٧   مجـ (ص − صَ)^2 = ٢٠

مجـ (س$_1$ − سَ$_1$)^2 = ٦٠   مجـ (س$_2$ − سَ$_2$)^2 = ٥٨

فإذا علمت أن قيمة (ف) النظريه عند مستوى معنوية α = ٥ ٪ وبدرجات حريه (٢،٥) = ٧٩ر٥، وقيمة (ت) النظريه عند نفس مستوى المعنويه وبدرجات حريه (٥) = ٥٧١ر٢ .

المطلوب :

١- إختبار النموذج (المعادله) السابقة طبقًا للمعيار الإقتصادي المسبق .

٢- إجراء إختبارات المعنوية الإحصائية [إختبار معنوية النموذج ككل وإختبار معنوية كل متغير مفسر على حدة]

٣- حدد القدره التفسيريه للنموذج [أوجد معامل التحديد وفسر معناه].

٤- هل النموذج السابق يصلح للتنبؤ، إذا كان الأمر كذلك تنبأ بحجم الأنفاق على الطعام (ص) إذا كان الدخل (س$_1$ = ١٠) والسعر (س$_2$ = ٢).

الحـــل :

١ - إختبار النموذج طبقًا للمعيار الإقتصادى المسبق :-

في حالة دالة الاستهلاك (الطلب على الطعام) تفترض النظرية الإقتصادية الآتي :

١ - المقــدار الثابت دائمًـا أكـبر من الصــفـر (حد الكفــاف لا بد أن يكون موجبًا) .

وحيث أن المقدار الثابت ($\hat{أ}$= ١٥ر٦) . ∴ فهو يتفق مع النظرية الإقتصادية

٢- معــامل الدخل ($س_١$) لا بد أن يكون موجب الإشاره (لــطردية العلاقة بين الدخل والاستهلاك) .

وحيث ان ($\hat{ب}_١$= ٣١٥ر) .

∴ فهو يتفق مع النظرية الإقتصادية .

٣- معامل الـسعر ($س_٢$) لا بد أن يكون ســالب الإشارة (لعكســية العلاقة بين السعر والكمية المطلوبة) .

وحيث أن ($\hat{ب}_٢$)=-٣٢٧ر .

∴ فهو يتفق مع النظرية الإقتصادية .

٢- إختبار المعنوية الإحصائية :-

أولا : إختبار معنوية النموذج ككل:

١- التغير الكلي (م.م.ك)= مجـ (ص-$\bar{ص}$)^٢

= ٢٠

٢- التغير المفسر ($\overline{\text{م.م.ر}}$) = $\hat{\text{ب}}_{١}$ مجـ (س - $\bar{\text{س}}_{١}$) (ص - $\bar{\text{ص}}$)

+ $\hat{\text{ب}}_{٢}$ مجـ (س$_{٢}$ - $\bar{\text{س}}_{٢}$) (ص - $\bar{\text{ص}}$)

= ٣١٥ر (٣٠) - ٣٢٧ر (-٣٠)

= ١٩ر٢٦

٣- التغير العشوائي (البواقي) م.م.ي = ٢٠ - ١٩ر٢٦

= ٧٤ر

الإختبارات:

١- الفرض الأصلي أ : $\hat{\text{ب}}_{\text{ر}}$ = صفراً ر = ١، ٢، ٣

٢- الفرض البديل أ$_{١}$: $\hat{\text{ب}}_{\text{ر}} \neq$ صفراً لواحدة على الأقل من قيم ر
ر = ١، ٢، ٣

٣- مستوى المعنويه : (α = ٥٪) فرضاً.

٤- المقياس الإحصائي المناسب : توزيع (ف)

٥- جدول تحليل التباين :

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات التباين	ف*
المفسر	١٩,٢٦	٢	$\frac{١٩,٢٦}{٢} = ٩,٦٣$	$\frac{١٩,٢٦}{٠,١٤٨} = ٦٥,٠٦$
البواقي	٠,٧٤	٥	$\frac{٠,٧٤}{٥} = ١,٤٨ = \sigma^{٢}$	
الكلي	٢٠	ن-١=٧		

٦- حيث أن قيمة (ف*) المحسوبة > ف النظرية

∴ نرفض الفرض الأصلي ونقبل الفرض البديل.

أي أن العلاقة المقدره جوهريه ككل بمستوى معنويه (α = ٥ ٪).

ثانياً : إختبار معنوية كل متغير تفسيرى على حده :-

١) $$أ_{٢٢} = \frac{١}{\text{مجـ}(س_{١}-\bar{س}_{١})^{٢} - \frac{\left[\text{مجـ}(س_{١}-\bar{س}_{١})(س_{٢}-\bar{س}_{٢})\right]^{٢}}{\text{مجـ}(س_{٢}-\bar{س}_{٢})^{٢}}}$$

$$= \frac{١}{٦٠ - \frac{(-٣٧)^{٢}}{٥٨}}$$

$$= \frac{١}{٦٠ - ٢٣,٦٣} = ٠,٠٢٧٤٧$$

$$أ_{٢٢} = \frac{١}{\text{مجـ}(س_٢ - \bar{س}_٢)^٢ - \dfrac{\left[\text{مجـ}(س_١ - \bar{س}_١)(س_٢ - \bar{س}_٢)\right]^٢}{\text{مجـ}(س_١ - \bar{س}_١)^٢}}$$

$$= \frac{١}{٥٨ - \dfrac{(-٣٧)^٢}{١٠}}$$

$$= \frac{١}{٥٨ - ٢٢,٨١٧} = ٠,٠٢٨٤٢٢$$

$$٢)\quad ع_{\hat{ب}_١} = \sqrt{\sigma^٢ \times أ_{١١}} = \sqrt{٠,١٤٨ \times ٠,٠٢٧٤٧} \quad ٠,٠٦٣٧$$

$$ع_{\hat{ب}_٢} = \sqrt{\sigma^٢ \times أ_{٢٢}} = \sqrt{٠,١٤٨ \times ٠,٠٢٨٤٢٢} = ٠,٠٦٤٨٦$$

الإختبارات:

١- الفرض الأصلي $ف_٠$: $\hat{ب}_ر$ = صفراً ، ر = ١ ، ٢

٢- الفرض البديل $ف_١$: $\hat{ب}_ر \neq$ صفرا ، ر = ١ ، ٢

٣- مستوى المعنويه : (α = ٥٪) فرضاً.

٤- المقياس الإحصائي المناسب : توزيع (ت).

$$ت^* = \frac{\hat{ب}_ر}{ع_{\hat{ب}_ر}}$$

٥ - العمليات الحسابيه :

$$ت_{١}^{*} = \frac{\hat{ب}_{١}}{ع_{\hat{ب}_{١}}} = \frac{٫٣١٥}{٫٠٦٣٧} = ٤٫٩٤$$

$$ت_{٢}^{*} = \frac{\hat{ب}_{٢}}{ع_{\hat{ب}_{٢}}} = \frac{٫٣٢٧}{٫٠٦٤٨٦} = ٥٫٠٤$$

٦- القرار :

حيث أن كل من ($ت_{١}^{*}$،$ت_{٢}^{*}$) المحسوبتين أكبر من (ت) النظرية .

∴ نرفض الفرض الأصلي ونقبل الفرض البديل.
اي أن كل من المتغيرين المفسرين ($س_{١}$، $س_{٢}$) لهما تأثيرًا معنويا بمستوى معنوية (α = ٥٪)

٣- تحديد القدرة التفسيرية للنموذج :-

$$\text{معامل التحديد المتعدد } (ر^{٢}) = \frac{\text{التغير المفسر}}{\text{التغير الكلي}} = \frac{١٩٫٢٦}{٢٠} = ٫٩٦٣$$

ومعناه أن (٩٦٫٣٪) من التغيرات في الأنفاق على الطعام (ص) ترجع إلى كل من الدخل ($س_{١}$) والسعر ($س_{٢}$) وأن حوالي (٣٫٧٪) من هذه التغيرات ترجع إلى عوامل أخرى غير مقيسه.

وهذا معناه أن النموذج المقدر له قوة وتفسيرية عاليه جدًا .

٤- هل النموذج المقدر يصلح للتنبؤ :-

حيث أن النموذج المقدر :

١- إجتاز إختبار المعيار الإقتصادي المسبق.

٢- معنويًا إحصائيًا ككل.

٣- المتغيرات المفسره ($س_1$ ،$س_2$) معنويه إحصائيًا.

∴ النموذج صالح للتنبؤ :

$$\boxed{\hat{ص} = ١٥٫٦ + ٣١٥٫ س_1 - ٣٢٧٫ س_2}$$

عندما $س_1$ = ١٠

$س_2$ = ٢

$$\hat{ص} = ١٥٫٦ + ٣١٥٫ (١٠) - ٣٢٧٫ (٢) = ١٥٫٦٦٤$$

٣- التنبــؤ
Forecasting.

كما ذكرنا في نهاية الفصل الأول أن للتنبؤ (٣) حالات هي :

- التنبؤ بنقطه .
- التنبؤ بفتره ثقه .
- إيجاد معنوية الفرق بين القيم الفعليه والقيمه المتنبأ بها .

وإذا تم استعراض الثلاث نقاط السابقه بالنسبه للمثال العام الخاص بقيمة مبيعات الشاي حيث كان : σ^{2} = ٣٠٩٢٦ر.

معادلة الانحدار المتعدد صَ= ٢٫٧٤٩٥+ ٧٥٠٩٤ر$س_{1}$+ ٣٦٦٢٢ر$س_{2}$

وقد إجتازت هذه المعـادله إختبارات المعيار الإقتصادي المسبق وإختبارات المعنوية الإحصائية .

فالمطلوب : التنبؤ بقيمة صَ إذا علمت أن $س_{1}$ = ١٠ ، $س_{2}$ = ٣٠.

١- التنبؤ بنقطة .

٢- التنبؤ بفترة ثقه ٩٥٪.

٣- إيجاد معنوية الفرق بين القيمة الفعليه والقيمه التنبؤيه إذا كانت قيم (ص) الفعليه = ٢٠

إذا علمت أن : ت النظريه عند مستوى معنوية (α =٥٪) ودرجات حرية (٥) = ٢٫٥٧

وان(سَ س)$^{-1}$ =

$$\begin{bmatrix} \text{ر٠٤٩٦٣٧٤٥٠-} & \text{ر١٠١٠٥٢١١-} & \text{١ر٣٧٥٠٤٤٤٣} \\ \text{ر٠٠٤٥٨٥٢-} & \text{ر٠٣٢٩١٣٩١} & \text{آر٠١٠٥٢١١-} \\ \text{ر٠٠٤٩٥٨٤١} & \text{ر٠٠٤٥٨٥٢-} & \text{ر٠٤٩٦٣٧٤٥-} \end{bmatrix}$$

الحل :

١- <u>التنبؤ بنقطه</u> :

صْ = ٢ر٧٤٩٥٤٤ + ٧٥٠٩٤٢ر س$_١$ + ٣٦٦٢٢٩ر س$_٢$

عندما س$_١$ = ١٠

س$_٢$ = ٣٠

صْ = ٢ر٧٤٩٥٤٤ + ٧٥٠٩٤٢ر(١٠) + ٣٦٦٢٢٩ر(٣٠)

= ٢١ر٢٤٥٨

٢- <u>التنبؤ بفترة الثقه</u> :

١) المصفوفه (حـ) =
$$\begin{bmatrix} \text{١} \\ \text{قيمة س}_١ \\ \text{قيمة س}_٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{١} \\ \text{١٠} \\ \text{٣٠} \end{bmatrix}$$

∴ حَ = $\begin{bmatrix} \text{٣٠} & \text{١٠} & \text{١} \end{bmatrix}$

٢) [حـَ (سَ س)$^{-١}$ حـ]

$$\begin{bmatrix} \text{١} \\ \text{١٠} \\ \text{٣٠} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{ر٠٤٩٦٣٧٤٥-} & \text{ر٢٠١٠٥٢١١-} & \text{١ر٣٧٥٠٤٤٤٣} \\ \text{ر٠٠٤٥٨٥٢-} & \text{ر٠٣٢٩١٣٩١} & \text{ر١٠١٠٥٢١١-} \\ \text{ر٠٠٤٩٥٨٤١} & \text{ر٠٠٤٥٨٥٢-} & \text{ر٠٤٩٦٣٧٤٥-} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{٣٠} & \text{١٠} & \text{١} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \text{١} \\ \text{١٠} \\ \text{٣٠} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{ر٠٤٢٤٦٢٨٥} & \text{ر٠٩٠٥٣٠٩٩} & \text{١ر١٢٤٦٠٠١٧-} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \text{١ر٠٥٤٥٩٥٢٣} \end{bmatrix} =$$

٣) الخطأ المعياري للتنبؤ :

$$\sigma_{\text{صَ ر}} = \left\{ \sigma^{٢} \, [\, \text{حـَ} \, (\text{سَ س})^{-١} \, \text{حـ} \,] \right\}^{\frac{١}{٢}}$$

$$= \left\{ \text{ر٣٠٩٢٦} \times \text{١ر٥٤٥٩٥٢٣} \right\}^{\frac{١}{٢}}$$

$$= \sqrt{\text{ر٣٢٦١١٤٤١٢}}$$

$$= \text{ر٥٧١٠٩٠٢٩١}$$

٤) فترة الثقة للتنبؤ :

$$\hat{ص}_{ر} \pm ت_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\hat{ص}_{ر}}$$

∴ ٢١ر٢٤٥٨ ± ٢ر٥٧١ x ر٥٧١٠٩٠٢٩١

٢١ر٢٤٥٨ ± ١ر٤٦٨٢٧٣

الحد الأدنى = ٢١ر٢٤٥٨ - ١ر٤٦٨٢٧٣

= ١٩ر٧٧٧٢٢٦ مليون جنيه

الحد الأعلى = ٢١ر٢٤٥٨ + ١ر٤٦٨٢٧٣

= ٢٢ر٧١٣٧٧٤ مليون جنيه

وعلى ذلك فإننا نتوقع بإحتمال ٩٥ ٪ أن تكون القيمه الحقيقيه للمبيعات بين الحدين الأدنى والأعلى.

٣- إختبارات معنوية الفرق بين القيم الفعلية والقيم المتنبأ بها :

١- الفرض الأصلي أ : $ص_{ر} = \hat{ص}_{ر}$

٢- الفرض البديل أ١ : $ص_{ر} \neq \hat{ص}_{ر}$

٣- مستوى المعنوية α : ٥٪ .

٤- المقياس الإحصائي المناسب : توزيع (ت).

$$ت^{*} = \left| \frac{ص_{ر} - \hat{ص}_{ر}}{\sigma_{\hat{ص}_{ر}}} \right|$$

٥) العمليات الحسابيه :

$$= \left| \frac{٢٠ \quad ٢١٫٢٤٥٨}{٩٠٢٩١٫٥٧١٠} \right|$$

$= ٢٫١٨١$

٦- القرار :

حيث أن قيمة ت* المحسوبه < ت النظرية .

نقبل الفرض الأصلي ونرفض الفرض البديل بمستوى معنوية (α) = ٥٪).

أي أن لا يوجد فرق معنوي بين القيم الفعليه والقيم التنبؤيه، وأن النموذج له قدره تنبؤيه عاليه .

* * * * *

٤-تقدير المرونات
Elasticites Estimation

تعبر المرونه عن التغير النسبي في المتغير التابع (ص) نتيجة التغير النسبي في المتغير المفسر ($س_ر$).

ويمكن استنتاج المرونات من نموذج الإنحدار الخطي المتعدد كالاتي:

نموذج الإنحدار :

$$\boxed{\hat{ص} = \hat{أ} + \hat{ب}_١ س_١ + \hat{ب}_٢ س_٢}$$

مرونة (ص) بالنسبة لـ ($س_١$)

$$= \frac{\text{التغير النسبي في (ص)}}{\text{التغير النسبي في } (س_١)}$$

$$= \frac{\Delta ص}{ص} \div \frac{\Delta س_١}{س_١}$$

$$= \frac{\Delta ص}{\Delta س_١} \times \frac{س_١}{ص}$$

وفى حالة التغير الطفيف فى ($س_١$) فتكون:

$$\text{مرونة (ص) بالنسبة لـ } (س_١) = \frac{6\, ص}{6\, س_١} \times \frac{س_١}{ص}$$

$$= \hat{\text{ب}}_{1} \times \frac{\bar{\text{س}}_{1}}{\bar{\text{ص}}}$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن :

مرونة (ص) بالنسبة لـ (س$_{2}$) $= \hat{\text{ب}}_{2} \times \frac{\bar{\text{س}}_{2}}{\bar{\text{ص}}}$

وبالنسبة للمثال العام الخاص بعينات الشاي حيث كانت معادلة الانحدار المتعدد هي $\hat{\text{ص}}$ = ٢ر٧٤٩٥ + ٧٥٠٩٤ر س$_{1}$ + ٣٦٦٢٢ر س$_{2}$

$\bar{\text{س}}_{1}$ = ٥ر١٢٥ ، $\bar{\text{س}}_{2}$ = ١٤ر٧٥ $\bar{\text{ص}}$ = ١٢

فإن :

١- مرنة (ص) بالنسبة لـ س$_{1}$:

$$= \hat{\text{ب}}_{1} \times \frac{\bar{\text{س}}_{1}}{\bar{\text{ص}}}$$

$$= ٧٥٠٩٤ر \times \frac{٥ر١٢٥}{١٢}$$

$$= ٣٢٠٧١٤ر$$

وهذا الرقم يعني أن زيادة قدرها (١ ٪) في مصاريف الأعلان (س$_{1}$) تؤدي إلى زيادة قدرها (٣٢٠٧١٤ر ٪) في قيمة المبيعات (ص) في نفس الاتجاه مع ثبات العوامل الأخرى المؤثره في قيمة المبيعات

٢- مرنة (ص) بالنسبة لـ $س_٢$:

$$\text{ب}_٢ \times \frac{\overline{س_٢}}{\overline{ص}}$$

$$= \text{٣٦٦٢٢ر} \times \frac{\text{١٤ر٧٥}}{\text{١٢}}$$

$$= \text{٤٥٠٥١٤٥ر}$$

وهذا الرقم يعني أن زيادة قدرها (١ ٪) في مصاريف الأعلان ($س_٢$) تؤدي إلى زيادة قدرها (٤٥٠٥١٤٥ر ٪) في قيمة المبيعات (ص) في نفس الإتجاه مع ثبات العوامل الاخرى المؤثره في قيمة المبيعات .

* * * * *

ملخص القوانين والعلاقات
التنبؤ والمرونه

أولاً : لا يمكن التنبؤ إلا بعد إجراء الاختبارات الآتيه :-

١- إختبار المعيار الإقتصادي المسبق (إشارات المعالم)

٢- إختبار معنوية النموذج أو المعادله ككل (جدول تحليل التباين) وإيجاد القوة التفسيرية للنموذج ($ر^٢$).

٣- إختبار معنوية كل متغير مفسر على حده والتأكد من أن كل المتغيرات المفسره معنوية إحصائياً [$ت_١^*$، $ت_٢^*$ أكبر من (ت) النظرية].

ثانياً : التنبؤ بنقطة :-

يتم بالتعويض في المعادله المقدره $\hat{ص} = \hat{أ} + \hat{ب}_١ س_١ + \hat{ب}_٢ س_٢$

بقيم $س_١$، $س_٢$ المعطاة :

ثالثاً : التنبؤ بفترة ثقه :-

١- توجد المصفوفه $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ١ \\ \text{قيمه } س_١ \text{ المعطاه} \\ \text{قيمه } س_٢ \text{ المعطاه} \end{bmatrix}$

والمصفوفه $\underline{جـ}' = \begin{bmatrix} ١ & \text{قيمه } س_١ \text{ المعطاه} & \text{قيمه } س_٢ \text{ المعطاه} \end{bmatrix}$

٢- نوجد قيمة $\left[\underline{\text{ج}}'\,(\underline{\text{س}}'\,\underline{\text{س}})^{-1}\,\underline{\text{ج}}\right]$

٣- الخطأ المعياري للتنبؤ :

$$\sigma_{\hat{\text{ص}}_{\text{ر}}} = \left\{ \sigma^{2} \left[\underline{\text{ج}}'\,(\underline{\text{س}}'\,\underline{\text{س}})^{-1}\,\underline{\text{ج}}\right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

٤- فترة الثقه للتنبؤ :

$$\boxed{\hat{\text{ص}}_{\text{ر}} \pm \text{ت}_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\hat{\text{ص}}_{\text{ر}}}}$$

رابعاً : إختيارات معنوية الفرق بين القيم الفعليه والقيم التنبؤيه :-

١- الفرض الأصلي أ_{0} : $\text{ص}_{\text{ر}} = \hat{\text{ص}}_{\text{ر}}$

٢- الفرض البديل أ_{1} : $\text{ص}_{\text{ر}} \neq \hat{\text{ص}}_{\text{ر}}$

٣- مستوى المعنوية : $\alpha = ٥ \%$

٤- المقياس الإحصائي المناسب : توزيع (ت).

$$\text{ت}^{*} = \left| \frac{\text{ص}_{\text{ر}} - \hat{\text{ص}}_{\text{ر}}}{\sigma_{\hat{\text{ص}}_{\text{ر}}}} \right|$$

٥- إجراء العمليات الحسابيه لايجاد قيمة (ت*) المحسوبة.

٦- القـــرار :

إذا كانت قيمة (ت*) المحسوبه كقيمه مطلقه أي بدون إشــارات > قيمة (ت) النظرية
فإنه يتم قبول الفرض الأصلي ويرفض الفرض البديل أي لا يوجد فرقًا معنويًا بين القيم الفعليـه والقيم التنبؤيه، وأن النموذج له قدره تنبؤيه عاليه .

خامسًا : المـــرونه :-

١- مرونة (ص) بالنسـبة لـ ($س_١$)

هي التغير النسـبي في المتغير التابع (ص) نتـيجة التغير النسـبي في المتغير المفسـر ($س_١$).

$$= \hat{ب}_١ \times \frac{\bar{س}_١}{\bar{ص}}$$

٢- مرونة (ص) بالنسـبة لـ ($س_٢$)

هي التغير النسـبي في المـتغير (ص) نتـيجة التغيـر النسـبي في المتغير المفسـر ($س_٢$).

$$= \hat{ب}_٢ \times \frac{\bar{س}_٢}{\bar{ص}}$$

تطبيق (٥):

لتقدير العلاقة بين الانفاق على اللحوم (ص) بعشرات الجنيهات والدخل بمئات الجنيهات ($س_1$) والسعر بالجنيهات ($س_2$) اختيرت عينه عشوائيه من تسعة قطاعات مختلفه ووجد أن :

مجـ ص= ١٠١ ، مجـ $س_1$=٥٤٠ ، مجـ $س_2$= ١٢٥

التغير الكلي (م.م.ك) = ٥٩٫٥٥٦.

التغير المفسر (م.م.ر) = ٥٦٫٤٩٦.

$$\text{المصفوفه } (\underline{س}'\,\underline{س})^{-1} = \frac{1}{88324}\begin{bmatrix} 175314 & -15338 & -5290 \\ -15338 & 2248 & 90 \\ -5290 & 90 & 342 \end{bmatrix}$$

وكانت معادلة الانحدار المقدره هي :

$$\hat{ص} = 11{,}402 + 0{,}7531\,س_1 - 0{,}33825\,س_2$$

وقد إجتازت المعادله السابقه إختبار المعيار الاقتصادي المسبق وإختبارات المعنوية الاحصائية وأن لها قوة تفسيرية عالية .

وكانت قيمة (ت) النظرية عند مستوى معنوية (α = ٥ ٪) وبدرجات حرية (٦) = ٢٫٤١٧ .

فالمطوب

١- تنبأ بقيمة الانفاق على اللحوم (ص) إذا علمت أن الدخل بمئات الجنيهات (س$_{١}$ = ١٢) وسعر اللحوم بالجنيهات (س$_{٢}$ = ٢٠)

أولا : التنبؤ بنقطة.

ثانيًا : التنبؤ بفترة ثقه ٩٥ ٪.

٢- إختبر القدرة التنبؤية للنموذج إذا علمت أن القيمة الفعليه للأنفاق على اللحوم بعشرات الجنيهات (ص$_{ر}$ = ١٤) .

٣- أوجد المرونات السعريه والدخليه وفسر معناها .

الحـــل :

حيث أن النموذج المقدر قد إجتاز إختبارات المعيار الاقتصادي المسبق وإختبارات المعنوية الاحصائية وأن له قوة تفسيريه عاليه .

∴ فهو يصلح للتنبؤ .

١- <u>التنبؤ بنقطه</u> :

صَ = ١١ر٤٠٢ + ٧٥٣١ر س$_{١}$ − ٣٣٨٢٥ر س$_{٢}$

عندما س$_{١}$ = ١٢

س$_{٢}$ = ٢٠

صَ = ١١ر٤٠٢٤ + ٧٥٣١ر(١٢) − ٣٣٨٢٥ر(٢٠)

= ١٣ر٦٧٣

٢ - التنبؤ بفترة الثقة :

١) المصفوفه (جـ) = $\begin{bmatrix} ١ \\ ١٢ \\ ٢٠ \end{bmatrix}$ ، $\text{جـ}' = \begin{bmatrix} ٢٠ & ١٢ & ١ \end{bmatrix}$

٢) [$\text{جـ}' (\text{س}' \text{س})^{-١}$ جـ]

$$= \begin{bmatrix} ٢٠ & ١٢ & ١ \end{bmatrix} \times \frac{١}{٨٨٣٢٤} \begin{bmatrix} ٢٥٩٠٠- & ١٥٣٣٨- & ١٧٥٣١٤ \\ ٩٠ & ٢٣٤٨ & ١٥٣٣٨- \\ ٢٤٢ & ٩٠ & ٥٢٩٠٠- \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ \\ ١٠ \\ ٣٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٫٢٩٦٨٤- & ٫١١٦٥٧٣٠٧ & ٫٠٠٠٠١١٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ \\ ١٢ \\ ٢٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٫٦٩٢١٥٥ \end{bmatrix}$$

٣) الخطأ المعياري للتنبؤ :-

$$\hat{\sigma}_{\text{ص}_{\text{ر}}} = \left\{ \sigma^{٢} \left[\text{جـ}' (\text{س}' \text{س})^{-١} \text{جـ} \right] \right\}^{\frac{١}{٢}}$$

وحيث أن $\sigma^{٢} = \dfrac{\text{البراقي}}{\text{ن - ك}} =$

م.م.ك − م.م.ر
= ———————
ن − ك

٥٩ر٥٥٦ − ٥٦ر٤٩٦
= ———————
٩ − ٣

٣ر٠٦
= ——— = ر٥١
٦

σ ص̂ر = { ر٥١ x ر٩٦٢١٥٥ }^(١/٢)

= √ر٣٢٩٩٩ = ر٥٩٤١

٤) فترة الثقة للتنبؤ :

ص̂ر ± ت x σ ص̂ر

١٣ر٦٧٣ ± ٢ر٤١٧ x ر٥٩٤١

١٣ر٦٧٣ ± ١ر٤٣٦

الحد الأدنى = ١٣ر٦٧٣ − ١ر٤٣٦ = ١٢ر٢٣٧

الحد الأعلى = ١٣ر٦٧٣ + ١ر٤٣٦ = ١٥ر١٠٩

بمستوى معنوية (α = ٥٪).

٣- المرونة الداخلية :

هي مرونة (ص) بالنسبة لـ الدخل (س_1)

$$= \hat{\text{ب}}_1 \times \frac{\bar{\text{س}}_1}{\bar{\text{ص}}}$$

$$= \text{٧٥٣١ر} \times \frac{\text{٦}}{\text{١١٫٢٢٢}}$$

$$= \text{٤٠٢٦ر}$$

$$\bar{\text{س}}_1 = \frac{\text{٥٤}}{\text{٩}} = \text{٦}$$

$$\bar{\text{ص}} = \frac{\text{١٠١}}{\text{٩}} = \text{١١٫٢٢}$$

$$\bar{\text{س}}_2 = \frac{\text{١٢٥}}{\text{٩}} = \text{١٣٫٨٩}$$

ومعناها أن تغير قدره (١ ٪) في الدخل (س_1) يؤدى إلى تغيراً قدره (٤٠٢٦ر ٪) في الأنفاق على اللحوم (ص) في نفس الاتجاه على ثبات العوامل الأخرى المؤثره في الانفاق (الطلب).

٤- المرونة السعريه :

هي مرونة (ص) بالنسبة للسعر (س_2)

$$= \hat{\text{ب}}_2 \times \frac{\bar{\text{س}}_2}{\bar{\text{ص}}}$$

$$= \text{-٣٣٨٢٥ر} \times \frac{\text{١٣٫٨٩}}{\text{١١٫٢٢٢}} = \text{-٤١٨٦ر}$$

ومعناها أن تغير قدره (١ ٪) في السعر (س_2) يؤدى إلى تغيراً قدره (٤١٨٦ر ٪) في الانفاق على اللحوم (ص) في الاتجاه العكسي مع ثبات العوامل الأخرى المؤثره في الانفاق (الطلب).

الباب الثالث

توزيع "ف" وتحليل التباين

"F" Distribution and Analysis of Variance

يعتبر توزيع "ف" أحد التوزيعات المشتقة من التوزيع الطبيعى . وله إستخدامات هامة فى إختبارات الفروض الإحصائية وتحليل التباين ، وسوف نعرض فى هذا الجزء بعض الإستخدامات الهامة لهذا التوزيع وهى :-

١. إختبارات الفروض الخاصة بتساوى التباين فى مجتمعين.

٢. تحليل التباين.

١- إختبار تساوى تباين مجتمعين

من الأهميه بمكان معرفة ما إذا كان تباين مجتمعين متساوى أو لا يوجد فرقاً جوهرياً بينهما أو معرفه أن العينات قد سحبت من نفس المجتمع ، وذلك بشرط أن يكون كل من المجتمعين موزعاً توزيعاً طبيعياً وأن العينات مستقلة ، ويمكن إتباع الخطوات الآتية :

أولاً : الفرض الأصلى أو فرض العدم ، تباين المجتمع الأول = تباين المجتمع الثانى

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

ثانياً : الفرض البديل $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

ثالثاً : إختيار مستوى للعنويه (α) : عادة ما يكون (٥ ٪)

رابعـــاً : للقياس الإحصائى للإختبار : توزيع "ف"

خامساً : العمليات الإحصائيه :

١- إيجاد التباين المقدر للمجتمع الأول = $\frac{ع_1^2 (ن_1)}{ن_1 - 1}$

٢- إيجاد التباين المقدر للمجتمع الثانى = $\frac{ع_2^2 (ن_2)}{ن_2 - 1}$

٣- (ف) المحسوبه = $\frac{\text{التباين المقدر الكبير}}{\text{التباين المقدر الصغير}}$

حيث أن : -

$ع_1$: الإنحراف المعيارى للعينه الأولى ، $ع_1^2$: تباين العينه الأولى

$ع_2$: الإنحراف المعيارى للعينه الثانيه ، $ع_2^2$: تباين العينه الثانيه

$ن_1$: حجم العينه الأولى

$ن_2$: حجم العينه الثانيه

سادساً : القرار :

إذا كانت (ف) المحسوبه ≥ ف (النظرية) بدرجات حريـه ($د_1$ ، $د_2$) وعند مستوى المعنويه المطلوب.

∴ يتـم قبـول الفـرض الأصلـى (فـرض عـدم الأختـلاف بـين تبـاين المجتمعين) ورفض الفرض البديل

او يتم قبول أن تباين المجتمعين متساوى

أو أن العينات مسحوبه من نفس المجتمع

حيث أن :

$د_1$: درجات الحريه للتباين الكبير

= (حجم العينه التى تباينها أكبر - ١)

د $_٢$: درجات الحريه للتباين الأصغر
- (حجم العينه التى تباينها أصغر - ١)

مثال (١) :

إختيرت عينه عشوانيه من حى مصر الجديده عدد مفرداتها (١٦) شخص فوجد ان تباين الدخل فيها هو (١٠) الاف جنيهاً ، واختيرت عينه اخرى من حى مدينة نصر حجمها (٢٦) شخص فوجد أن تباين الدخل فيها هو (١٨) الف جنيهاً وبفرض أن الدخل فى كل من للجتمعين موزعاً توزيعاً طبيعياً.

للطلوب : هل هناك فرقاً جوهرياً بين تباين الدخل فى الحيين .

او بمعنى اخر هل يمكن إعتبار أن العينتين مسحوبتين من نفس المجتمع وذلك عند مستوى معنويه α = (٥٪).

الحل :

حجم العينه الأولى	ن$_١$	= ١٦
حجم العينه الثانيه	ن$_٢$	= ٢٦
تباين العينه الأولى	ع$_١^٢$	= ١٠
تباين العينه الثانيه	ع$_٢^٢$	= ١٨

خطوات إختبارات الفروض : -

اولاً : الفرض الأصلى أو فرض العدم ، تباين المجتمع الأول = تباين المجتمع الثانى

$$\sigma_١^٢ = \sigma_٢^٢$$

ثانيـــاً : الفرض البديل : $\sigma_١^٢ \neq \sigma_٢^٢$

ثالثـــاً : مستوى المعنويه : α = (٥ ٪)

رابعـــاً : المقياس الإحصائى المناسب : توزيع "ف"

خامساً : العمليات الحسابيه :

١- التباين المقدر للمجتمع الأول = $\dfrac{ع_١^٢ (ن_١)}{ن_١ - ١}$

$$= \frac{١٠ (١٦)}{١٥} = ١٠,٦٧$$

بدرجات حريه (د) = ن - ١ = ١٦ - ١ = ١٥

٢- التباين المقدر للمجتمع الثانى =
$$\frac{ع_٢^٢ (ن_٢)}{ن_٢ - ١}$$

$$= \frac{١٨ (٢٦)}{٢٥} = \boxed{١٨,٧٢}$$

بدرجات حريه (د) = ن$_٢$ - ١ = ٢٦ - ١ = ٢٥

٣- (ف) المحسوبه = $\frac{\text{التباين المقدر الكبير}}{\text{التباين المقدر الصغير}}$

$$= \frac{١٨,٧٢}{١٠,٦٧}$$

$$= ١,٧٥$$

سادساً : القرار

حيث أن د١ : هى درجات الحريه للتباين الأكبر = ٢٥

د٢ : هى درجات الحريه للتباين الصغر = ١٥

وحيث أن (ف) النظريه بدرجات حريه (٢٥ ، ١٥) وعند مستوى معنويه (α = ٥٪) هى (٢,٦٩)*

وحيث أن ف (المحسوبه) أصغر من (ف) النظريه

∴ **يتم قبول الفرض الأصلى (فرض عدم إختلاف تباين المجتمعين)**

ورفض الفرض البديل بمستوى معنويه α = ٥٪

---

* القيمه مستخرجه من جدول قيم " F " عند مستوى معنويه α = ٥٪ (جانبين)

٢- تحليل التباين
Analysis Of Variance

من الأستخدامات للهمه فى تحليل التباين معرفة ما إذا كان هناك فرقاً جوهرياً بين متوسط ثلاث مجموعات او أكثر او إختبار الفرض القائل بعدم الإختلاف بين عدة متوسطات وذلك بشرط:

١. ان تكون المجتمعات المسحوب منها العينات موزعه توزيعاً طبيعياً.
٢. ان تكون المجتمعات ذات تباين متساوى.
٣. ان تكون العينات مستقله.

وسنعرض فى هذا الجزء تحليل التباين فى إتجاه واحد وفى إتجاهين.

اولاً : تحليل التباين فى إتجاه واحد : One-Way Analysis Of Variance

ويتم تحليل التباين فى إتجاه واحد فى حالتين هما :

١- احجام العينات غير متساوية

ونعنى بتحليل التباين فى إتجاه واحد إختبار معنوية الفرق بين عدة متوسطات بإستخدام عينات غير متساوية فى الحجم لظاهره معينه من وجهه واحدة فقط ويتم إجراء الإختبار كالآتى : -

إستخراج بيانات التمرين الأساسيه : -

* مجـ س = مجموع القيم كلها .
* مجـ $س^٢$ = مجموع مربعات القيم كلها .
* ن = حجم العينه الكلى = $ن_١ + ن_٢ + \ldots\ldots$
* ك = عدد الأعمدة

خطوات الإختبار : -

أولاً : الفرض الأصلى (فرض العدم) : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

ثانيـــاً : الفرض البديل : $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

ثالثـــاً : مستوى المعنويه α : عادة ما يكون (٥٪)

رابعـــاً : المقياس الإحصائى المناسب : توزيع (ف)

خامساً : العمليات الحسابيه : -

١- إيجاد مجموع مربعات الإختلاف الكلي : -

$$م.م.ك = مجـ س^{٢} - \frac{(مجـ س)^{٢}}{ن}$$

بدرجات حرية = عدد القيم كلها - ١ = ن - ١

٢- إيجاد مجموع مربعات الإختلاف بين المجموعات : -

$$م.م.ك = \frac{(مجـ ع_{١})^{٢}}{ن_{١}} + \frac{(مجـ ع_{٢})^{٢}}{ن_{٢}} + \dots\dots\dots\dots - \frac{(مجـ س)^{٢}}{ن}$$

بدرجات حرية = عدد الأعمده - ١ = ك - ١

٣- إيجاد مجموع مربعات الإختلاف داخل المجموعات : -

م . م . ك = الكلى - بين المجموعات

بدرجات حريه = ن - ك

٤- عمل جدول تحليل التباين :-

١ مصدر الإختلاف	٢ مجموع المربعات	٣ درجات الحريه	٤ متوسط المربعات (التباين)	٥ ف (المحسوبه)
بين المجموعات	م . م . ب	ك - ١	$\frac{\text{العمود ٢}}{\text{العمود ٣}} = A$	$\frac{A}{B}$
داخل المجموعات	م . م . د	ن - ك	$\frac{\text{العمود ٢}}{\text{العمود ٣}} = B$	
الكلى	م . م . ك	ن - ١		

سادساً : إتخاذ القرار :-

إذا كانت قيمة (ف) المحسوبة ≥ ف النظرية بدرجات حرية (ك-١) للبسط ، (ن-ك) للمقام وعند مستوى للعنوية المفترض يتم قبول الفرض الأصلي (فرض العدم) ويرفض الفرض البديل والعكس صحيح.

او بمعنى آخر إذا كانت (ف) المحسوبة ≥ (ف) النظرية .

∴ لا يوجد فرقاً جوهرياً بين متوسطات المجتمعات المسحوب منها العينات والعكس صحيح .

حيث أن :-

μ_1 ، μ_2 ، ... = هي متوسطات المجتمعات .

$ن_1$ ، $ن_2$ ، ... = حجم العينة الأولى ، حجم العينة الثانية ، ...

مج ع$_1$ ، مج ع$_2$ ، ... = مجموع قيم العمود الأول ، مجموع قيم العمود الثاني ، ...

مثال : (٢) :-

اختيرت ثلاث عينات عشوائية من طلبة كلية التجارة - جامعة عين شمس لمعرفة ما إذا كان هناك علاقة بين نوعية الدراسة وعدد ساعات مشاهدة التليفزيون ، العينة الأولى حجمها (٦) طلاب من النظاميين والثانية حجمها (٥) طلاب من الإنتساب والثالثة من شعبة اللغة الإنجليزية وحجمها (٤) طلاب وتم رصد عدد الساعات التي يقضيها كل منهم أمام التليفزيون في أحد أيام العطلات الرسمية فكانت كالآتي :-

العينة / مفردات العينة	الطلبة النظاميين	طلبة الإنتساب	طلبة اللغة الإنجليزية	
الطالب الأول	٤ ساعة	٧ ساعة	٦ ساعة	
الطالب الثاني	٥ ساعة	٦ ساعة	٥ ساعة	
الطالب الثالث	٧ ساعة	٣ ساعة	٨ ساعة	
الطالب الرابع	٦ ساعة	٢ ساعة	٩ ساعة	
الطالب الخامس	صفر ساعة	٤ ساعة		
الطالب السادس	٨ ساعة			
المجموع	٣٠	٢٢	٢٨	٨٠

والمطلوب :

معرفة ما إذا كان متوسط عدد ساعات المشاهدة متساوي في الأقسام المختلفة أو بمعنى آخر ، إختبر الفرض القائل بعدم الإختلاف بين متوسط ساعات مشاهدة التليفزيون لطلبة الأقسام المختلفة .

أو بمعنى ثالث ، هل يؤثر القسم الدراسي في عدد ساعات مشاهدة التليفزيون .

وذلك عند مستوى معنوية (α = ٥ ٪)

وبفرض أن المجتمعات المسحوب منها العينات موزعة توزيعاً طبيعياً وأن تباينها متساوي .

الحل :-

البيانات الأساسيه التمرين :-

* مجـ س = ٤ + ٥ + ...+ ٩ = ٨٠

* مجـ $س^٢$ = $٤^٢$ + $٥^٢$ + ...+ $٩^٢$ = ٥١٠

* ن = $ن_١$ + $ن_٢$ + $ن_٣$

= ٦ + ٥ + ٤ = ١٥

* ك = عدد الأعمده = ٣

خطوات الإختبار :

أولاً : الفرض الأصلى (فرض العدم) : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

ثانيـــاً : الفرض البديل : $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

ثالثـــاً : مستوى للعنويه : α = ٥٪

رابعـــاً : للقياس الإحصائى للناسب : توزيع (ف)

خامساً : العمليات الحسابيه :-

١- إيجاد مجموع مربعات الإختلاف الكلى :-

م . م . ك = مجـ $س^٢$ - $\frac{(\text{مجـ س})^٢}{ن}$

= ٥١٠ - $\frac{(٨٠)^٢}{١٥}$

= ٥١٠ - ٤٢٦,٦٧ = $\boxed{٨٣,٣٣}$

بدرجات حريه = عدد القيم كلها - ١ = ن - ١ = ١٥ - ١ = ١٤

٢- إيجاد مجموع مربعات الإختلاف بين المجموعات :-

م . م . ب = $\frac{(\text{مجـ ع}_١)^٢}{ن_١}$ + $\frac{(\text{مجـ ع}_٢)^٢}{ن_٢}$ + $\frac{(\text{مجـ ع}_٣)^٢}{ن_٣}$ - $\frac{(\text{مجـ س})^٢}{ن}$

= $\frac{(٣٠)^٢}{٦}$ + $\frac{(٢٢)^٢}{٥}$ + $\frac{(٢٨)^٢}{٤}$ - $\frac{(٨٠)^٢}{١٥}$

= ٤٤٢,٨ - ٤٢٦,٦٧ = $\boxed{١٦,١٣}$

بدرجات حريه = عدد الأعمده - ١ = ك - ١ = ٣ - ١ = ٢

٣- إيجاد مجموع مربعات الإختلاف داخل المجموعات : -

م.م.د = الكلى - بين المجموعات

= ٨٣,٣٣ - ١٦,١٣ = $\boxed{٦٧,٢}$

بدرجات حريه = ١٤ - ٢ = ١٢

٤- جدول تحليل التباين :

مصدر الإختلاف	مجموع المربعات	درجات الحريه	متوسط المربعات (التباين)	(ف) المحسوبه
بين المجموعات	١٦,١٣	٢	$\frac{١٦,١٣}{٢}$ = ٨,٠٦٥	$\frac{٨,٠٦٥}{٥,٦}$ = ١,٤٤
داخل المجموعات	٦٧,٢	١٢	$\frac{٦٧,٢}{١٢}$ = ٥,٦	
الكلى	٨٣,٣٣	١٤		

سادساً : القرار

حيث أن (ف) النظريه بدرجات حريه (٢، ١٢) وبمستوى معنويه α = (٥٪) هى (٣,٨٩).

وحيث ان (ف) المحسوبه < (ف) النظريه

∴ يتم قبول الفرض الأصلى (فرض العدم) ويرفض الفرض البديل بمستوى معنويه α = (٥٪)

او بمعنى آخر ، لا يوجد فرقاً جوهرياً بين طلبة الأقسام الثلاثه فى متوسط عدد ساعات مشاهدة التليفزيون.

او بمعنى ثالث لا يوجد تاثيراً جوهرياً للقسم الدراسى على عدد ساعات المشاهده.

مثال (٣) : -

إختيرت (٣) عينات عشوائية ، عينة من القاهره والأخرى من الأسكندريه والثالثه من اسيوط حجم كل منهم على التوالى هو ٣٠ ، ٢٠ ، ١٥ مفردة.

وتم إيجاد الوسط الحسابى للمنصرف على اللحوم إسبوعياً لكل عينه فكان على التوالى ١٠ ، ٨ ، ٦ جنيهات ، فإذا علمت ان مجـ $س^٢$ = ٦٦٥٣,٨٥ .

المطلوب : معرفة ما إذا كان إختلاف المدينة يؤثر تاثيراً جوهرياً على إستهلاك اللحوم باستخدام مستوى معنويه α = (٥٪) وبفرض ان المجتمعات المسحوب منها العينات موزعه توزيعاً طبيعياً ولها تباين متساوى.

الحل : -

ملاحظات :

$$١- \bar{س}_١ = \frac{مجـ\ س_١}{ن_١} \quad \therefore \quad مجـ\ س_١ = \bar{س}_١ \times ن_١$$

$$= ١٠ \times ٣٠ = ٣٠٠ \Leftarrow مجـ\ ع_١$$

$$٢- \bar{س}_٢ = \frac{مجـ\ س_٢}{ن_٢} \quad \therefore \quad مجـ\ س_٢ = ٨ \times ٢٠ = ١٦٠ \Leftarrow مجـ\ ع_٢$$

$$٣- \bar{س}_٣ = \frac{مجـ\ س_٣}{ن_٣} \quad \therefore \quad مجـ\ س_٣ = ٦ \times ١٥ = ٩٠ \Leftarrow مجـ\ ع_٣$$

البيانات الأساسيه للتمرين :

* مجـ س = ٣٠٠ + ١٦٠ + ٩٠ = ٥٥٠
* مجـ $س^٢$ = ٦٦٥٣,٨٥
* $ن = ن_١ + ن_٢ + ن_٣$
  = ٣٠ + ٢٠ + ١٥ = ٦٥

* ك = عدد الاعمده = ٣

خطوات الإختبار :

أولاً : الفرض الأصلى : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

ثانيــاً : الفرض البديل : $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

ثالثــاً : مستوى المعنويه : α = (٥٪)

رابعــاً : المقياس الإحصائى المناسب : توزيع (ف)

خامساً : العمليات الحسابيه : -

١- إيجاد مجموع مربعات الإختلاف الكلى : -

$$\text{م . م . ك} = \text{مجـ س}^2 - \frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}}$$

$$= ٦٦٥٢,٨٥ - \frac{(٥٥٠)^2}{٦٥}$$

$$= ٦٦٥٢,٨٥ - ٤٦٥٢,٨٥ = \boxed{٢٠٠٠}$$

بدرجات حريه = ن - ١ = ٦٥ - ١ = ٦٤

٢- إيجاد مجموع مربعات الإختلاف بين المجموعات : -

$$\text{م . م . ب} = \frac{(\text{مجـ ع}_1)^2}{\text{ن}_1} + \frac{(\text{مجـ ع}_2)^2}{\text{ن}_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}}$$

$$= \frac{(٣٠٠)^2}{٢٠} + \frac{(١٦٠)^2}{٢٠} + \frac{(٩٠)^2}{١٥} - \frac{(٥٥٠)^2}{٦٥}$$

$$= ٤٨٢٠ - ٤٦٥٢,٨٥ = \boxed{١٦٦,١٥}$$

بدرجات حريه = ك - ١ = ٣ - ١ = ٢

٣- إيجاد مجموع مربعات الإختلاف داخل المجموعات : -

م . م . د = الكلى - بين المجموعات

$$= ٢٠٠٠ - ١٦٦,١٥ = \boxed{١٨٣٣,٨٥}$$

بدرجات حريه = ٦٤ - ٢ = ٦٢

٤- جدول تحليل التباين :

مصدر الإختلاف	مجموع المربعات	درجات الحريه	متوسط المربعات (التباين)	(ف) المحسوبة
بين المجموعات	١٦٦,١٥	٢	$\frac{١٦٦,١٥}{٢}$ = ٨٣,٠٧٥	$\frac{٨٣,٠٧٥}{٢٩,٥٨}$ = ٢,٨١
داخل المجموعات	١٨٣٣,٨٥	٦٢	$\frac{١٨٨٣,٨٥}{٦٢}$ = ٢٩,٥٨	
الكلى	٢٠٠٠	٦٤		

سادساً : القرار

حيث ان (ف) النظريه بدرجات حريه (٢، ٦٢) وعند مستوى معنويه α = (٥٪) هى (٣,١٥).

وحيث ان (ف) المحسوبه < (ف) النظريه

∴ يتم قبول الفرض الأصلى ويرفض الفرض البديل بمستوى معنويه α = (٥٪)

او بمعنى آخر ، يتم قبول فرض العدم القائل بعدم الإختلاف فى متوسط الإنفاق على اللحوم بين المدن الثلاثة.

٢- تحليل التباين فى إتجاه واحد :-

فى حالة أحجام العينات متساويه :

تتبع نفس خطوات تحليل التباين فى حالة احجام العينات غير المتساويه تماماً فيما عدا :

مجموع مربعات الإختلاف بين المجموعات :

$$\text{م . م . ب} = \frac{(\text{مجـ ع}_1)^2 + (\text{مجـ ع}_2)^2 + \ldots\ldots}{\text{ن}_1} - \frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}}$$

حيث أن : ن_1 : هو حجم العينه الأولى أو حجم العينه المتساوى.

مثال (٤) :

إختيرت (٤) عينات عشوائيه . حجم كل منها (٦) مراكز توزيع لأحد أنواع الشاى الشهيره ، العينه الأولى من القاهره والثانيه من الأسكندريه والثالثه من اسيوط أما الرابعه فهى من المحلة الكبرى فوجد أن متوسط مبيعات الشاى بالمليون جنيه فى الأسبوع كالآتى :

المنطقة / مراكز التوزيع	القاهرة	الإسكندريه	اسيوط	المحلة الكبرى	
الأول	٤	٢	٦	٤	
الثانى	٣	٢	٧	٣	
الثالث	٢	٤	٦	٢	
الرابع	٥	١	٨	١	
الخامس	٦	٥	٩	٥	
السادس	٧	٤	٦	٣	
المجموع	٢٧	١٩	٤٢	١٨	١٠٦

والمطلوب :
هل هناك إختلافاً جوهرياً بين المناطق الأربعه فى متوسط استهلاك الشاى او بمعنى اخر ، هل يؤثر إختلاف المكان فى إستهلاك الشاى بمستوى معنويه α = (٥٪) ، وبفرض ان المجتمعات المسحوب منها العينات موزعه توزيعاً طبيعياً وذات تباين متساوى .

الحل : -

بيانات التمرين الأساسيه : -

* مجـ س = ٤ + ٣ + ... + ٣ = ١٠٦

* مجـ س^2 = ٤^2 + ٣^2 + ... + ٣^2 = ٥٧٦

* ن = ن$_1$ + ن$_2$ + ن$_3$ + ن$_4$
= ٦ + ٦ + ٦ + ٦ = ٢٤

* ك = عدد الأعمده = ٤

خطوات الإختبار : -

أولاً : الفرض الأصلى : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

ثانياً : الفرض البديل : $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_4$

ثالثاً : مستوى المعنويه : α = (٥٪)

رابعاً : المقياس الإحصائى المناسب : توزيع (ف)

خامساً : العمليات الحسابيه : -

١- إيجاد مجموع مربعات الإختلاف الكلى : -

م . م . ك = مجـ س^2 - $\frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}}$

= ٥٧٦ - $\frac{(١٠٦)^2}{٢٤}$ = $\boxed{١٠٧,٨٣}$

بدرجات حرية = ن - ١ = ٢٤ - ١ = ٢٣

٢- ايجاد مجموع مربعات الإختلاف بين المجموعات : -

$$\text{م.م.ب} = \frac{(\text{مجـ ع}_1)^2 + (\text{مجـ ع}_2)^2 + \ldots\ldots}{\text{ن}_1} - \frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}}$$

$$= \frac{(٢٧)^2 + (١٩)^2 + (٤٢)^2 + (١٨)^2}{٦} - \frac{(١٠٦)^2}{٢٤}$$

$$= ٥٢٩,٦٧ - ٤٦٨,١٧ = \boxed{٦١,٥}$$

بدرجات حرية = ك - ١ = ٤ - ١ = ٣

٠- جدول تحليل التباين :

مصدر الإختلاف	مجموع المربعات	درجات الحريه	متوسط المربعات (التباين)	(ف) المحسوبه
بين المجموعات	٦١,٥	٣	$\frac{٦١,٥}{٣} = ٢٠,٥$	$\frac{٢٠,٥}{٢,٣٣} = ٨,٨٥$
داخل المجموعات	٤٦,٦٣	٢٠	$\frac{٤٦,٦٣}{٢٠} = ٢,٣٣$	
الكلى	١٠٧,٨٣	٢٣		

سادساً : القرار : -

حيث ان (ف) النظريه بدرجات حريه (٣ ، ٢٠) وعند مستوى معنويه α = (٥٪) هي (٣,١).

وحيث ان (ف) المحسوبه > (ف) النظريه

∴ يتم رفض الفرض الأصلى وقبول الفرض البديل بمستوى معنويه α = (٥٪)

اى ان هناك إختلافاً جوهرياً فى إستهلاك الشاى بين المحافظات الأربعة او ان إختلاف المحافظة له تأثيراً جوهرياً على إستهلاك الشاى.

مثــال (٥) :-

إختيرت (٣) عينات بطريقة عشوائية حجم كل منها (٤) مفردات فوجد ان مجموع مربعات الإختلاف الكلى (م . م . ك) = (٨٤،٦٧١) وإن التباين داخل المجموعات = (٨،٨٣) وبفرض أن المجتمعات المسحوب منها العينات موزعه توزيعاً طبيعياً إن تباينها متساوى .

المطلوب : -

إختبار فرض العدم القائل بعدم الإختلاف بين متوسطات المجتمعات التى سحبت منها العينات بمستوى معنويه α = (٥٪)

إذا علمت أن :

ف النظريه (٩،٢) = ٣،٨٦ ؛ ف النظريه (١٠،٢) = ٤،١٠ ، ف النظريه (٩،٢) = ٤،٢٦

الحل :

بيانات التمرين الأساسيه : -

* ن = ن$_1$ + ن$_2$ + ن$_3$
= ٤ + ٤ + ٤ = ١٢

* ك = عدد الأعمدة
= عدد العينات = ٣

__خطوات الإختبار : -__

أولاً : الفرض الأصلى : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

ثانيــاً : الفرض البديل : $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

ثالثــاً : مستوى المعنويه : α = (٥٪)

رابعــاً : المقياس الإحصائى المناسب : توزيع (ف)

خامساً : العمليات الحسابيه : -

١- مجموع مربعات الإختلاف الكلى : -

م . م . ك = $\boxed{٨٤,٦٧}$

بدرجات حرية = ن - ١

= ١٢ - ١ = ١١

ملاحظات : -

١- درجات الحرية الخاصه بـ (م ، م . ب) = ك - ١

= ٣ - ١ = ٢

٢- درجات الحرية الخاصه بـ (م . م . د) = ن - ك

= ١٢ - ٣ = ٩

٣- التباين داخل المجموعات = $\frac{\text{م . م . د}}{\text{درجات الحرية}}$

٨,٨٣ = $\frac{\text{م . م . د}}{٩}$

∴ م . م . د = ٨,٨٣ × ٩ = $\boxed{٧٩,٤٧}$

٤- م . م . ب = م . م . ك - م . م . د

= ٨٤,٦٧ - ٧٩,٤٧ = $\boxed{٥,٢}$

٤- جدول تحليل التباين :

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحريه	متوسط المربعات (التباين)	(ف) المحسوبه
بين المجموعات	٥,٢	٢	$\frac{٥,٢}{٢}$ = ٢,٦	$\frac{٢,٦}{٨,٨٣}$ = ٠,٢٩
داخل المجموعات	٧٩,٤٧	٩	$\frac{٩,٤٧}{٩}$ = ٨,٨٣	
الكلى	٨٤,٦٧	١١		

سادساً : القرار :-

حيث ان (ف) النظريه بدرجات حريه (٢، ٩) = ٤,٢٦ وبمستوى معنويه α = (٥٪).

وحيث ان (ف) المحسوبه $<$ (ف) النظريه

∴ يتم قبول فرض العدم (عدم الإختلاف بين متوسطات المجتمعات) ورفض الفرض البديل بمستوى معنويه α = (٥٪).

ثانيا : تحليل التباين فى إتجاهين
Two-Ways Analysis Of Variance

فى هذه الحالة يتم اخذ معيارين فى الإعتبار ، معيار تأثير للعالجات (الأعمده) على الظاهرة محل الدراسه ، ومعيار تأثير القطاعات (الصفوف) على نفس الظاهره إلى جانب تأثير التفاعل بين الأعمده والصفوف على الظاهره ، وسيتم تقسيم هذا الجزء إلى قسمين هما :

١- تحليل التباين فى إتجاهين بدون تفاعل داخلى :-
Two-Ways Analysis Of Variance Without Internal Interaction:

وفى هذه الحالة لا نهتم بتأثير التفاعل بين الصفوف و الأعمده على الظاهره محل القياس ويتم عمل الإختبار كالآتى : -

بيانات التمرين الأساسيه :

* مج س = مجموع القيم كلها.
* مج س٢ = مجموع مربعات القيم كلها.
* ن = حجم العينه الكلى = ن١ + ن٢ + ...
* ك = عدد الأعمده.

خطوات الإختبار : -

اولاً : الفرض الأصلى :

١- لا يوجد تأثيراً معنوياً للمعالجات (الأعمدة) على الظاهرة.

٢-لا يوجد تأثيراً معنوياً للقطاعات (الصفوف) على الظاهرة.

ثانياً : الفرض البديل : -

١- يوجد تأثيراً معنوياً للأعمدة على الظاهرة .

٢-يوجد تأثيراً معنوياً للصفوف (القطاعات) على الظاهرة .

ثالثاً : مستوى المعنويه : α = (٥٪).

رابعاً : للقياس الإحصائى المناسب : توزيع "ف"

خامساً : العمليات الحسابية : -

١- إيجاد مجموع مربعات الإختلاف الكلي : -

$$\text{م . م . ك} = \text{مجـ س}^2 - \frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}}$$

بدرجات حرية = عدد القيم كلها - ١

= ن - ١

٢- إيجاد مجموع مربعات الإختلاف بين الأعمده : -

$$\text{م . م . ب}_1 = \frac{(\text{مجـ ع}_1)^2 + (\text{مجـ ع}_2)^2 + \ldots\ldots}{\text{ن}_1} - \frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}}$$

حيث أن مجـ ع١ هو مجموع قيم العمود الأول

بدرجات حريه = عدد الأعمدة - ١

= ك - ١

٣- إيجاد مجموع مربعات الإختلاف بين القطاعات (الصفوف) : -

$$\text{م . م . ب}_2 = \frac{(\text{مجـ ص}_1)^2 + (\text{مجـ ص}_2)^2 + \ldots\ldots}{\text{ك}} - \frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}}$$

حيث أن مجـ ص١ هو مجموع الصف الأول

بدرجات حرية = عدد الصفوف - ١

= ن١ - ١

٤- إيجاد مجموع مربعات البواقي : -

م . م . ق = الكلى - بين الأعمدة - بين الصفوف

٥- جدول تحليل التباين :

مصدر الإختلاف	مجموع للربعات	درجات الحريه	متوسط للربعات (التباين)	ف (المحسوبه)
١	٢	٣	٤	٥
بين الأعمدة	م . م . ب ١	ك - ١	العمود ٢ ÷ العمود ٣= A	ف ١= $\frac{A}{C}$
بين القطاعات	م . م . ب ٢	ن ١ - ١	العمود ٢ ÷ العمود ٣= B	ف ٢= $\frac{B}{C}$
البواقى	الفرق	الفرق	العمود ٢ ÷ العمود ٣= C	
الكلى	م . م . ك	ن - ١		

سادساً : القرار : -

١- إذا كانت ف ١ (المحسوبة) ≥ ف النظريه بدرجات حرية [(ك-١) ، (درجات حرية البواقى)]

∴ لا يوجد تاثيراً معنوياً للأعمدة على الظاهره محل الدراسة.

٢- إذا كانت ف ٢ (المحسوبة) ≥ ف النظريه بدرجات حرية [(ن ١ - ١) ، (درجات حرية البواقى)]

∴ لا يوجد تاثيراً معنوياً للقطاعات (الصفوف) على الظاهره محل الدراسة.

مثال : (٦) :-

الآتى يمثل النتائج للتحصل عليها من عينة عشوائيه رصلت بياناتها بالنسبه لإستهلاك الكهرباء بالجنيه فى الأسبوع للفرد وصنفت حسب الأحياء المختلفه وفئات الدخل ووضعت فى الجدول الآتى :-

الحى / الدخل	شبرا	مصر الجديدة	الوايلى	المجموع
اقل من ٥٠	٣	٤	٢	٩
٥٠ــ	٢	٨	١	١١
١٠٠ــ	٤	٥	٣	١٣
١٥٠ــ	٥	٦	٤	١٥
٢٠٠ــ	٣	٩	٥	١٧
٢٥٠ــ	١	٧	٦	١٤
٣٠٠ فأكثر	٧	٨	٦	٢١
المجموع	٢٥	٤٧	٢٧	٩٩

والمطلوب :-

١- هل هناك تأثيراً جوهرياً للحى على إستهلاك الكهرباء (الأعمدة).

٢- هل هناك تأثيراً جوهرياً للدخل على إستهلاك الكهرباء (الصفوف).

وذلك عند مستوى معنوية α = (٥٪) ، وبفرض ان المجتمعات المسحوب منها العينات موزعة توزيعاً طبيعياً وذات تباين متساوى.

الحل :

البيانات الأساسية للتمرين : -

* مجـ س = ٣ + ٢ + ...+ ٦ = ٩٩

* مجـ $س^٢$ = $٣^٢$ + $٢^٢$ + ...+ $٦^٢$ = ٥٧٥

* ن = $ن_١$ + $ن_٢$ + $ن_٣$

= ٧ + ٧ + ٧ = ٢١

* ك = عدد الأعمدة = ٣

خطوات الإختبار : -

أولاً : الفرض الأصلى : -

١- لا يوجد تأثيراً معنوياً للأعمده (الأحياء) على إستهلاك الكهرباء.

٢-لا يوجد تأثيراً معنوياً للصفوف (الدخل) على إستهلاك الكهرباء.

ثانياً : الفرض البديل : -

١- يوجد تأثيراً معنوياً للأعمدة على إستهلاك الكهرباء.

٢- يوجد تأثيراً معنوياً للصفوف على إستهلاك الكهرباء.

ثالثاً : مستوى المعنويه : α = (٥٪).

رابعاً : المقياس الإحصائى المناسب : توزيع (ف).

خامساً : العمليات الحسابيه :

١- إيجاد مجموع مربعات الإختلاف الكلي : -

$$م.م.ك = مجـ س^٢ - \frac{(مجـ س)^٢}{ن}$$

$$= ٥٧٥ - \frac{(٩٩)^٢}{٢١}$$

$$= ٥٧٥ - ٤٦٦,٧١ = \boxed{١٠٨,٢٩}$$

بدرجات حرية = عدد المفردات كلها - ١ = ٢١ - ١ = ٢٠

٢- إيجاد مجموع مربعات الإختلاف بين الأعمده (المعالجات) : -

$$م.م.ك = \frac{(مجـ ع_١)^٢ + (مجـ ع_٢)^٢ + ...}{ن_١} - \frac{(مجـ س)^٢}{ن}$$

$$= \frac{(٢٥)^٢ + (٤٧)^٢ + (٢٧)^٢}{٧} - \frac{(٩٩)^٢}{٢١}$$

$$= ٥٠٩ - ٤٤٦,٧١ = \boxed{٤٢,٢٩}$$

بدرجات حرية = عدد الأعمدة - ١ = ٣ - ١ = ٢

٣- إيجاد مجموع مربعات الإختلاف بين الصفوف (القطاعات) :-

$$م . م . ب_٢ = \frac{(مجـ ص_١)^٢ + (مجـ ص_٢)^٢ + ...}{ك} - \frac{(مجـ س)^٢}{ن}$$

$$= \frac{(٩)^٢ + (١١)^٢ + ... + (٢١)^٢}{٣} - \frac{(٩٩)^٢}{٢١}$$

$$= ٤٩٩ - ٤٤٦,٧١ = \boxed{٣٢,٢٩}$$

بدرجات حرية = عدد الصفوف - ١ = ٧ - ١ = ٦

٤- إيجاد مجموع مربعات البواقى :-

م . م . ق = الكلى - بين الأعمدة - بين الصفوف

$$= ١٠٨,٢٩ - ٤٢,٢٩ - ٣٢,٢٩ = \boxed{٣٣,٧١}$$

بدرجات حريه = ٢٠ - ٢ - ٦ = ١٢

٥- جدول تحليل التباين :

مصدر الإختلاف	مجموع المربعات	درجات الحريه	متوسط المربعات (التباين)	ف (المحسوبه)
بين الأعمدة	٤٢,٢٩	٢	$\frac{٤٢,٢٩}{٢} = ٢١,١٥$	$ف_١ = \frac{٢١,١٥}{٢,٨١} = ٧,٥٢$
بين الصفوف	٣٢,٢٩	٦	$\frac{٣٢,٢٩}{٦} = ٥,٣٨$	$ف_٢ = \frac{٥,٣٨}{٢,٨١} = ١,٩٢$
البواقى	٣٣,٧١	١٢	$\frac{٣٣,٧١}{١٢} = ٢,٨١$	
الكلى	١٠٨,٢٩	٢٠		

سادساً : القرار : -

١- حيث ان (ف) النظريه بدرجات حرية (٢ ،١٢) وعند مستوى معنوية

α = (٥٪) هى ٣,٤٩ .

وحيث ان ف ١ (المحسوبة) > ف النظريه .

∴ هناك تاثيراً معنوياً للأعمدة (اللحى) على إستهلاك الكهرباء.

٢-حيث ان (ف) النظرية بدرجات حريه (٦ ،١٢) وعند مستوى معنوية

α- (٥٪) هى (٣).

وحيث ان ف ٢ المحسوبة < ف النظرية.

∴ لا يوجد تاثيراً معنوياً للصفوف (الدخل) على إستهلاك الكهرباء.

٢- تحليل التباين فى إتجاهين مع وجود تفاعل داخلى : -

Two-Ways Analysis Of Variance With Internal Interaction :

فى هذه الحالة يفترض وجود تفاعل بين للعالجات والقطاعات (الأعمدة والصفوف) ويتم إختبار تأثير هذا التفاعل على الظاهره محل الدراسة إلى جانب إختبار تاثير كل من المعالجات والقطاعات ، ويمكن أن يجرى العمل كالآتى : -

بيانات التمرين : -

* مجـ س = مجموع القيم كلها .
* مجـ س^٢ = مجموع مربعات القيم.
* ن = حجم العينة الكلى = ن ١ + ن ٢ + ...

حيث أن (ن ١) هو عدد القيم فى العمود الأول

* ك = عدد الأعمدة
* ط = عدد القطاعات
* هـ = عدد القيم فى الخلية الواحدة

خطوات الإختبار : -

أولاً : الفرض الأصلى :

١- لا يوجد تاثيراً معنوياً للمعالجات (الأعمدة) على الظاهرة.

٢-لا يوجد تاثيراً معنوياً للقطاعات (الصفوف) على الظاهرة.

٣- لا يوجد تاثيراً معنوياً لتفاعل الأعمدة والقطاعات على الظاهرة.

ثانياً : الفرض البديل : -

١- يوجد تاثيراً معنوياً للأعمدة على الظاهرة .

٢-يوجد تاثيراً معنوياً للصفوف (القطاعات) على الظاهرة .

٣- يوجد تاثيراً معنوياً لتفاعل الأعمدة والقطاعات على الظاهرة.

ثالثاً : مستوى المعنويه : α وعادة ما يكون (٥٪).

رابعاً : المقياس الإحصائى المناسب : توزيع (ف).

خامساً : العمليات الحسابيه :

١- إيجاد مجموع مربعات الإختلاف الكلى : -

$$\text{م . م . ك} = \text{مجـ س}^{٢} - \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}}$$

بدرجات حريه = ن - ١

٢- إيجاد مجموع مربعات الإختلاف بين الأعمده (المعالجات) : -

$$\text{م . م . ب}_{١} = \frac{(\text{مجـ ع}_{١})^{٢} + (\text{مجـ ع}_{٢})^{٢} + \ldots\ldots}{\text{ن}_{١}} - \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}}$$

بدرجات حرية = ك - ١

حيث أن (مجـ ع ١) هى مجموع قيم العمود الأول.

٣- إيجاد مجموع مربعات الإختلاف بين الصفوف (القطاعات) : -

$$\text{م . م . ب}_{٢} = \frac{(\text{مجـ ط}_{١})^{٢} + (\text{مجـ ط}_{٢})^{٢} + \ldots\ldots}{\text{ك} \times \text{هـ}} - \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}}$$

بدرجات حرية = ط - ١

حيث أن (مجـ ط ١) هى مجموع قيم القطاع الأول.

٤- إيجاد مجموع مربعات البواقى : -

$$\text{م . م . ق} = \frac{(\text{مجـ هـ}_1)^2 + (\text{مجـ هـ}_2)^2 + \ldots\ldots}{\text{هـ}} - \frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}}$$

بدرجات حريه = ك ط (هـ - ١)

حيث أن (مجـ هـ ١) : هي مجموع قيم الخلية الأولى.

٥- إيجاد مجموع مربعات التفاعل بين الأعمده والقطاعات : -

م . م . ب ٢ = مجموع المربعات الكلى- بين الأعمده - بين القطاعات -لبواقى

٦- عمل جدول تحليل التباين كالآتى : -

مصدر الإختلاف	مجموع المربعات	درجات الحريه	متوسط المربعات (التباين)	ف (المحسوبه)
بين الأعمدة	م . م . ب ١	ك - ١	العمود٢ ÷ العمود٣- A	ف١ = $\frac{A}{D}$
بين القطاعات	م . م . ب ٢	ط - ١	العمود٢ ÷ العمود ٣- B	ف٢ = $\frac{B}{D}$
التفاعل	الفرق	الفرق	العمود٢ ÷ العمود ٣- C	ف٣ = $\frac{C}{D}$
البواقى	م . م . ق	ك ط (هـ -١)	العمود٢ ÷ العمود ٣- D	
الكلى	م . م . ك	ن - ١		

سادساً : القرار : -

١- إذا كانت ف ١ (المحسوبة) ≥ ف النظريه.

∴ لا يوجد تأثيراً للأعمدة على الظاهره والعكس صحيح.

٢- إذا كانت ف ٢ (المحسوبة) ≥ ف النظريه.

∴ لا يوجد تأثيراً للقطاعات على الظاهره والعكس صحيح.

٣- إذا كانت ف ٣ (المحسوبة) ≥ ف النظريه.

∴ لا يوجد تأثيراً لتفاعل كل من الأعمده والقطاعات على الظاهره والعكس صحيح.

مثال :

لدراسة الإنفاق على التدخين ومدى تأثرة بكل من مستوى الدخل ومستوى التعليم ، إختيرت عينة عشوائية مكونة من (٤٨) شخص من اللذين تزيد أعمارهم عن (١٥) سنه فى مدينة القاهرة وحسب متوسط الإنفاق اليومى على التدخين لمفردات العينه ووضعت النتائج فى الجدول الآتى :

الدخل / التعليم	منخفض	متوسط	مرتفع	
امى	٣	٢	٢	
	٢	١	٦	
	٤	٣	٤	
	١	٥	٧	
	١٠	١١	١٩	٤٠
يقرأ ويكتب	٢	٤	٣	
	٣	٣	٢	
	٠	١	٠	
	١	٠	٠	
	٦	٨	٥	١٩
مؤهل متوسط	٤	٣	١	
	٢	٦	٥	
	١	٠	٤	
	٠	٠	٠	
	٧	٩	١٠	٢٦
مؤهل عالى	٣	١	٠	
	٠	٣	٠	
	١	٠	٣	
	٢	٤	١	
	٦	٨	٤	١٨
المجموع	٢٩	٣٦	٣٨	١٠٣

وبفرض أن المجتمعات المسحوب منها العينات موزعه توزيعاً طبيعيا و ذات تباين متساوى و أن مستوى المعنويه α = (٥٪).

المطلوب :

١- هل يعتبر مستوى الدخل له تأثيراً معنوياً على التدخين؟

٢-هل يعتبر مستوى التعليم له تأثيراً معنوياً على التدخين؟

٣-هل يعتبر التفاعل بين الدخل والتعليم له تأثيراً معنوياً على التدخين؟

الحل :

بيانات التمرين الأساسيه :

* مجـ س = مجموع القيم كلها = ٣ + ٢ + ٣ + ... + ١٠
  = ١٠٣

* مجـ س^{٢} = مجموع مربعات القيم كلها = $(٣)^{٢}$ + $(٢)^{٢}$ + $(٣)^{٢}$ + ... + $(١)^{٢}$
  = ٢٨٥

* ن = حجم العينه الكلى = ن$_{١}$ + ن$_{٢}$ + ...
  = ١٦ + ١٦ + ١٦ = ٤٨

* ك = عدد الأعمدة = ٣

* ط = عدد القطاعات = ٤

* هـ = عدد القيم فى الخلية الواحدة = ٤

خطوات الإختبار :-

أولاً : الفرض الأصلى :

١- لا يوجد تأثيراً معنوياً للدخل على التدخين (الأعمدة).

٢-لا يوجد تأثيراً معنوياً للتعليم على التدخين (القطاعات).

٣- لا يوجد تأثيراً معنوياً لتفاعل الدخل مع التعليم على التدخين.

ثانياً : الفرض البديل :-

١- يوجد تأثيراً معنوياً للدخل على التدخين.

٢-يوجد تأثيراً معنوياً للتعليم على التدخين.

٣- يوجد تأثيراً معنوياً للتفاعل بين الدخل و التعليم على التدخين.

ثالثاً : مستوى المعنويه : $\alpha = (5\%)$.

رابعاً : المقياس الإحصائي المناسب : توزيع (ف).

خامساً : العمليات الحسابيه :

١- إيحاد مجموع مربعات الإختلاف الكلي : -

$$\text{م.م.ك} = \text{مجـ س}^{2} - \frac{(\text{مجـ س})^{2}}{\text{ن}}$$

$$= ٢٨٥ - \frac{(١٠٣)^{2}}{٤٨}$$

$$= ٢٨٥ - ٢٢١,٠٢ = \boxed{١٦٣,٩٨}$$

بدرجات حريه = ن - ١ = ٤٨ - ١ = ٤٧

٢- إيجاد مجموع مربعات الإختلاف بين الأعمده (الدخل) : -

$$\text{م.م.ب}_{1} = \frac{(\text{مجـ ع}_{1})^{2} + (\text{مجـ ع}_{2})^{2} + \ldots\ldots}{\text{ن}_{1}} - \frac{(\text{مجـ س})^{2}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{(٢٩)^{2} + (٣٦)^{2} + (٣٨)^{2}}{١٦} - \frac{(١٠٣)^{2}}{٤٨}$$

$$= ٢٢٣,٨١ - ٢٢١,٠٢ = \boxed{٢,٧٩}$$

بدرجات حرية = ك - ١ = ٣ - ١ = ٢

٣- إيجاد مجموع مربعات الإختلاف بين القطاعات (التعليم) : -

$$\text{م.م.ب}_{2} = \frac{(\text{مجـ ط}_{1})^{2} + (\text{مجـ ط}_{2})^{2} + \ldots\ldots}{\text{ك} \times \text{هـ}} - \frac{(\text{مجـ س})^{2}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{(٤٠)^{2} + (١٩)^{2} + (٢٦)^{2} + (١٨)^{2}}{٣ \times ٤} - \frac{(١٠٣)^{2}}{٤٨}$$

$$= ٢٤٦,٧٥ - ٢٢١,٠٢ = \boxed{٢٥,٧٣}$$

بدرجات حرية = ط - ١ = ٤ - ١ = ٣

٤- إيجاد مجموع مربعات البواقي :-

م.م.ق = $\frac{(\text{مجـ هـ}_1)^2 + (\text{مجـ هـ}_2)^2 + ...}{\text{هـ}}$ - $\frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}}$

= $\frac{(١٠)^2 + (١١)^2 + ... + (٤)^2}{٤}$ - $\frac{(١٠٣)^2}{٤٨}$

= ٢٦٣,٢٥ - ٢٢١,٠٢ = $\boxed{٤٢,٢٣}$

بدرجات حريه = ك ط (هـ - ١)

= ٣ × ٤ × ٣ = ٣٦

٥- إيجاد مجموع مربعات التفاعل بين الأعمده والقطاعات :-

م.م.ب$_2$ = مجموع المربعات الكلى - بين الأعمده - بين القطاعات - البواقى

= ١٦٣,٩٨ - ٢,٧٩ - ٢٥,٧٢ - ٤٢,٢٣

= ١٦٣,٩٨ - ٧٠,٧٥ = $\boxed{٩٣,٢٣}$

٦- جدول تحليل التباين :-

مصدر الإختلاف	مجموع المربعات	درجات الحريه	متوسط المربعات (التباين)	ف (المحسوبه)
بين الأعمدة (الدخل)	٢,٧٩	٢	$\frac{٢,٧٩}{٢}$ = ١,٣٨	ف$_1$ = $\frac{١,٣٨}{١,١٧٣}$ = ١,١٩
بين القطاعات (التعليم)	٢٥,٧٢	٣	$\frac{٢٥,٧٢}{٣}$ = ٨,٥٨	ف$_2$ = $\frac{٨,٥٨}{١,١٧٣}$ = ٧,٣١
التفاعل	٩٣,٢٣	٦	$\frac{٩٣,٢٣}{٦}$ = ١٥,٥٤	ف$_3$ = $\frac{١٥,٥٤}{١,١٧٣}$ = ١٣,٢٥
البواقى	٤٢,٢٣	٣٦	$\frac{٤٢,٢٣}{٣٦}$ = ١,١٧٣	
الكلى	١٦٣,٩٨	٤٧		

سادساً : القرار :-

١- (ف) النظرية بدرجات حرية (٢ ، ٣٦) وبمستوى معنويه α = (٥٪) = ٣,٢٣.

وحيث أن ف$_1$ (المحسوبه) < (ف) النظرية

∴ لا يوجد تاثيراً معنوياً للأعمدة (الدخل) على التدخين.

٢-(ف) النظرية بدرجات حرية (٣ ،٣٦) وبمستوى معنويه α - (٥٪) - ٢,٨٤.

وحيث ان ف ، (المحسوبه) > (ف) النظرية.

∴ يوجد تاثيراً معنوياً للقطاعات(التعليم) على التدخين.

٣-(ف) النظرية بدرجات حرية (٦، ٣٦) وبمستوى معنويه α - (٥٪) - ٢,٣٤.

وحيث ان ف ، (المحسوبه) > (ف) النظرية.

∴ يوجد تاثيراً معنوياً لتفاعل التعليم مع الدخل على التدخين.

وعلى ذلك فإن متخذ القرار إذا كان هدفه الأصلاح فإنه يهتم بمحو الأميه لتقليل نسبة المدخنين أما إذا كان هدفه هو بيع السجائر كان يكون مديراً لشركة لتصنيع السجائر او خلافه فانه هذه الحاله يقتصر بتوجيه الحملات الإعلانيه على غيرالمتعلمين .

تمارين عامة
على
توزيع "ف" وتحليل التباين

لمعرفة ما إذا كان سلوك ربات البيوت في كل من مدينتي القاهرة والأسكندرية متشابه من حيث كمية المشتريات من مساحيق غسيل الملابس ، اختيرت عينة عشوائية حجمها (١١) ربة أسرة من القاهرة .. فوجد أن الإنحراف المعياري للمشتريات في العينة هو (١٥) كيلوجرام ، وسحبت عينة عشوائية من مدينة الأسكندرية حجمها (١٧) ربة أسرة فوجد أن الإنحراف المعياري للعينة هو (١٢) كيلوجرام .
وبفرض أن المجتمعين موزعين توزيعاً طبيعياً .
المطلوب : إختبر فرض العدم القائل بعدم الإختلاف بين تباين المجتمعين وذلك بمستوى معنوية (α = ٥٪) .
أو بمعنى آخر : هل يعتبر سلوك ربات البيوت في شراء مساحيق الغسيل متشابهة في المدينتين .
إذا علمت أن (ف) النظرية بدرجات حرية (١٠ ، ١٦) وبمستوى معنوية (α = ٥٪) = ٢,٩٩ .

٢. لدراسة ما إذا كان نوع الدراسة يؤثر في عدد ساعات الإستذكار ، تم سحب (٤) عينات عشوائية الأولى من كلية التجارة حجمها (٧) طلاب ، والثانية من الألسن حجمها (٥) طلاب والثالثة من الآداب حجمها (٦) طلاب والأخيرة من الحقوق حجمها (٤) طلاب ، وتم رصد متوسط ساعات الإستذكار اليومي لكل منهم ووصفت النتائج في الجدول الآتي :-

الكلية / الطالب	التجارة	الألسن	الأدب	الحقوق	
الأول	٤ ساعة	٥ ساعة	٦ ساعة	٧ ساعة	
الثاني	٣ ساعة	٦ ساعة	٣ ساعة	٦ ساعة	
الثالث	٧ ساعة	٤ ساعة	٢ ساعة	٢ ساعة	
الرابع	٦ ساعة	٣ ساعة	صفر ساعة	١ ساعة	
الخامس	٥ ساعة	٧ ساعة	٤ ساعة		
السادس	٣ ساعة		١ ساعة		
السابع	٢ ساعة				
المجموع	٣٠ ساعة	٢٥ ساعة	١٦ ساعة	١٦ ساعة	٨٧ ساعة

والمطلوب : معرفة ما إذا كان هناك إختلافاً جوهرياً في متوسط ساعات الإستذكار اليومي في الكليات الأربعة بمستوى معنوية (α = ٥٪) أو بمعنى آخر هل تؤثر نوعيه الدراسة على عدد ساعات الإستذكار وذلك بفرض ان المجتمعات موزعة توزيعاً طبيعياً وان تباينها متساوي .

٣. اختيرت (٣) عينات عشوائية لثلاثة انواع من اجهزة التليفزيون المنتجة بواسطة (٣) مصانع مختلفة لمعرفة متوسط العمر الإفتراضي لكل نوع .
وبفرض ان مجموع المربعات الكلي م . م . ك = ١٠٩,٣٨ وبفرض أن لدينا البيانات :

بيـــان	المصنع الأول	المصنع الثاني	المصنع الثالث
حجم العينة	٥	٦	٤
متوسط عمر الجهاز	٤,٨	٥,٨٣٣٣	٣,٢٥

والمطلوب : معرفة ما إذا كان هناك إختلافاً جوهرياً في متوسط عمر الأنواع الثلاثة من اجهزة التليفزيون بمستوى معنوية (α = ٥٪) وبفرض ان عمر الأجهزة في المصانع الثلاثة موزع توزيعاً طبيعياً وان تباينها متساوي .

٤. تم إختيار (٤) عينات بطريقة عشوائية من أربعة مجتمعات حجم كل عينة (٦) مفردات وكان مجموع قيم العينات الأربعة على التوالي هو ٢٧ ، ١٩ ، ٤٢ ، ١٨ وكان مجموع مربعات القيم كلها مجـ س٢ = ٥٧٦

وبفرض ان المجتمعات المسحوب منها العينات موزعة توزيعاً طبيعياً وتباينها متساوي بالنسبة للظاهرة محل القياس .
فالمطلوب : إختبار فرض العدم القائل بعدم الإختلاف بين متوسطات المجتمعات بمستوى معنوية (α = ٥٪) .

٥. لمعرفة العوامل التي يمكن ان يكون لها تاثيراً جوهرياً على التدخين في مدينة معينة تم إختيار عينة عشوائية من الأشخاص ورصدت بياناتهم الخاصة بمتوسط الإنفاق اليومي على التدخين بالجنيه ، وصنفت هذه البيانات طبقاً لفئات الدخل وفئات العمر ووضعت في الجدول الآتي :-

الدخل / العمر	منخفض	متوسط	مرتفع	المجموع
اقل من ١٢	٣	٤	صفر	٧
١٢-	٤	٢	١	٧
١٨-	٥	٣	٥	١٣
٢٣-	٦	١	٧	١٤
٥٠-	٢	صفر	٣	٥
٦٠ فأكثر	صفر	٢	١	٣
المجموع	٢٠	١٢	١٧	٤٩٠

والمطلوب :-
١) هل هناك تاثيراً جوهرياً للدخل على التدخين ؟
٢) هل هناك تاثيراً جوهرياً للعمر على التدخين ؟

وذلك عند مستوى معنوية (α= ٥٪) ، وبفرض ان المجتمعات المسحوب منها العينات موزعة توزيعاً طبيعياً بالنسبة للإنفاق على التدخين وتباينها متساوي .

الباب الرابع
النماذج الإحصائية

يقصد بالنموذج بأنه دالة رياضية تتضمن جميع المتغيرات التى تؤثر فى ظاهرة معين . حيث أن الدالة الرياضية تُعرف بأنها علاقة بين متغير تابع ويرمز له بالرمز (ص) ومتغير مستقل ويرمز له بالرمز (س) أو أكثر من متغير مستقل ويرمز لهم بالرمز (س$_١$ ، س$_٢$ ، .....) ، حيث أن المتغير التابع يعتمد على المتغير أو المتغيرات المستقلة ويتأثر بهم.

وفيما يلى عرض لبعض النماذج الإحصائية على سبيل المثال وليس على سبيل الحصر :

أولاً : نموذج الإنحدار الخطى البسيط .

ثانياً : نموذج الدالة الأسية .

ثالثاً : نموذج الدالة العكسية .

رابعاً : نموذج منحنى جمبرتز .

خامساً : النموذج الخطى للودائع .

وفيما يلى شرح تفصيلى لكل من النماذج السابقة :

أولا : نموذج الإنحدار الخطى البسيط (النموذج الخطى البسيط)

يقصد بالإنحدار الخطي البسيط هو دراسة العلاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع (ص) والآخر متغير مستقل (س) ، حيث أن المتغير المستقل يؤثر على المتغير التابع . ومن أمثلة العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل العلاقة بين الكمية التى تستهلكها الأسرة من سلعة معينة وبين دخل هذه الأسرة ، حيث أنه إذا زاد دخل الأسرة بمقدار معين زادت الكمية المستهلكة من السلعة والعكس صحيح. وهذا يعنى أن الكمية المستهلكة من السلعة تعتمد على الدخل وتتأثر به ، ومن ثم فإن الكمية المستهلكة تعتبر متغير تابع (ص) أما الدخل فيعتبر متغير مستقل (س).

ومن المثال السابق نجد أن القيمة التى يأخذها المتغير التابع (ص) تعتمد بصفة أساسية على قيمة المتغير المستقل (س) ، أى أن هناك علاقة دالية بين (ص) ، (س) وهذه العلاقة تكتب رياضياً كالآتى :

$$\boxed{\text{ص} = \text{د (س)}}$$

وتسمى هذه العلاقة " العلاقة الدالية البسيطة " حيث أن المتغير التابع يعتمد ويتأثر بمتغير مستقل واحد فقط.

وتأخذ معادلة نموذج الإنحدار الخطى البسيط الشكل الآتى :

ص̂ = أ̂ + ب̂ س

ولتقدير هذا النموذج هناك ثلاث طرق :

طريقة الحذف — الطريقة المختصرة — طريقة المصفوفات

١ تقدير نموذج الإنحدار الخطى البسيط باستخدام طريقة الحذف :

الخطوات:

(١) يتم إيجاد قيمة أ̂ ، ب̂ عن طريق حل المعادلتين الطبيعيتين الآتيتين جبرياً بطريقة الحذف :

مجـ ص = ن أ + ب مجـ س

مجـ س ص = أ مجـ س + ب مجـ س٢

(٢) يتم التعويض عن قيم أ̂ ، ب̂ فى معادلة الإنحدار الخطى البسيط الآتية :

ص̂ = أ̂ + ب̂ س

٢ تقدير نموذج الإنحدار الخطى البسيط باستخدام الطريقة المختصرة :

الخطوات :

(١) يتم إيجاد قيمة $\hat{\text{ب}}$ كالآتى :

$$\hat{\text{ب}} = \frac{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})(\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^{2}} = \frac{\text{مجـ س ص} - \frac{\text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن}}}{\text{مجـ س}^{2} - \frac{(\text{مجـ س})^{2}}{\text{ن}}}$$

(٢) يتم إيجاد قيمة $\hat{\text{أ}}$ كالآتى :

$$\boxed{\hat{\text{أ}} = \bar{\text{ص}} - \hat{\text{ب}}\ \bar{\text{س}}}$$

حيث :

$$\bar{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}$$

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$$

ن = عدد القيم أو حجم العينة

(٣) يتم التعويض عن قيم $\hat{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ فى معادلة الإنحدار الخطى البسيط الآتية :

$$\boxed{\hat{\text{ص}} = \hat{\text{أ}} + \hat{\text{ب}}\ \text{س}}$$

٣ تقدير نموذج الإنحدار الخطى البسيط باستخدام طريقة المصفوفات :

الخطوات :

(١) يتم تكوين مصفوفة المعاملات ونرمز لها بالرمز (سَ س) الآتية :

$$\begin{pmatrix} \text{مجـ س} & \text{ن} \\ \text{مجـ س}^{2} & \text{مجـ س} \end{pmatrix} = (\text{سَ س})$$

(٢) يتم إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات ونرمز لها $(\text{سَ س})^{-1}$ وذلك باتباع الخطوات الآتية :

(أ) يتم إيجاد المحدد العام لمصفوفة المعاملات كالآتي :

$$\begin{pmatrix} \text{مجـ س} & \text{ن} \\ \text{مجـ س}^{2} & \text{مجـ س} \end{pmatrix}$$

القطر الرئيسى   القطر الفرعى

المحدد العام = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى − حاصل ضرب عناصر القطر الفرعى

(ب) يتم إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات باستخدام القانون الآتى :

$$\text{معكوس مصفوفة المعاملات} = \frac{1}{\text{المحدد العام}} \begin{pmatrix} \text{مجـ س} & \text{ن} \\ \text{مجـ س}^{2} & \text{مجـ س} \end{pmatrix}$$

يتم تغيير إشارة عناصر القطر الفرعى

يتم إبدال عناصر القطر الرئيسى مكان بعضهما

ونرمز لمعكوس مصفوفة المعاملات بالرمز $(\text{سَ س})^{-1}$

(٣) يتم إيجاد قيمة $\hat{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ كالآتى :

$$\begin{pmatrix} \hat{\text{أ}} \\ \hat{\text{ب}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{معكوس مصفوفة المعاملات} \\ (\text{سَ س})^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{مصفوفة الثواب} \\ (\text{سَ ص}) \end{pmatrix}$$

حيث :

$$\text{مصفوفة الثوابت } (\text{سَ س}) = \begin{pmatrix} \text{مجـ ص} \\ \text{مجـ س ص} \end{pmatrix}$$

(٤) يتم التعويض عن قيم $\hat{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ فى معادلة الإنحدار الخطى البسيط الآتية :

$$\boxed{\hat{\text{ص}} = \hat{\text{أ}} + \hat{\text{ب}}\ \text{س}}$$

ملاحظات هامـــة :

(١) إذا لم يذكر فى التمرين الطريقة المستخدمة فى تقدير النموذج الخطى فأنه من الأفضل استخدام الطريقة المختصرة .

(٢) بعض العلاقات الهامة :

$$\text{مجـ}\,(\text{س}-\bar{\text{س}})\,(\text{ص}-\bar{\text{ص}}) = \text{مجـ س ص} - \frac{\text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن}}$$

$$\text{مجـ}\,(\text{س}-\bar{\text{س}})^{2} = \text{مجـ س}^{2} - \frac{(\text{مجـ س})^{2}}{\text{ن}}$$

$$\text{مجـ}\,(\text{ص}-\bar{\text{ص}})^{2} = \text{مجـ ص}^{2} - \frac{(\text{مجـ ص})^{2}}{\text{ن}}$$

• اختبار جوهرية (معنوية) النموذج الخطى البسيط :

يتم عمل هذا الاختبار لمعرفة ما إذا كان المتغير المستقل (س) له تأثير جوهرى على المتغير التابع (ص) أم لا.

خطوات هذا الاختبار :

(١) التغير الكلـــى (م . م . ك) = مجـ $(ص - \bar{ص})^2$

(٢) التغير المفسر (م . م . ر) = $\hat{ب}$ مجـ $(س - \bar{س})$ $(ص - \bar{ص})$

(٣) التغير العشوائى (البواقى) (م . م . ى) = م . م . ك – م . م . ر

(٤) يتم عمل جدول تحليل التباين :

$$\frac{\text{مجموع المربعات}}{\text{درجات الحرية}}$$

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات (التباين)	ف المحسوبة
المفسر	ناتج الخطوة (٢)	١	$\boxed{xx}$	ف
العشوائى	ناتج الخطوة (٣)	ن – ٢	÷ $\boxed{xx}$	
الكلى	ناتج الخطوة (١)			

تسمى هذه القيمة (تباين التقدير)
ويرمز لها بالرمز σ^2

(٥) يتم مقارنة قيمة ف المحسوبة بقيمة ف الجدولية التى بدرجات حرية

(١ ، ن – ٢)

إذا كانت

ف المحسوبة > ف الجدولية

↓

∴ النموذج جوهرى أو معنوى

أى أن المتغير المستقل (س) له تأثير

جوهرى على المتغير التابع (ص)

إذا كانت

ف المحسوبة ≥ ف الجدولية

↓

∴ النموذج غير جوهرى أو غير معنوى

أى أن المتغير المستقل (س) ليس له

تأثير جوهرى على المتغير التابع (ص)

- **استخدام النموذج الخطى البسيط فى التنبؤ :**

أولا - التنبؤ بنقطة :

فى هذه الحالة يتم التعويض عن قيمة س المعطاة فى التمرين فى معادلة الانحدار الخطى البسيط فنحصل على قيمة $\hat{ص}$.

ثانيا - التنبؤ بفترة ثقة :

القانون المستخدم :

$$\boxed{\hat{ص} \pm ت \times \sigma_{\hat{ص}}}$$

حيث :

$\hat{ص}$: قيمة التنبؤ بنقطة

ت : قيمة ت الجدولية التى بدرجات حرية (ن – ٢)

$\sigma_{\hat{ص}}$: الخطأ المعيارى للتنبؤ ويتم حسابه كالآتى :

$$\boxed{\sigma_{\hat{ص}} = \sigma \sqrt{١ + \frac{١}{ن} + \frac{(س_{ن} - \bar{س})^{٢}}{مجـ (س - \bar{س})^{٢}}}}$$

حيث :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^{٢}} = \sqrt{\text{تباين التقدير}}$$

$س_{ن}$ = قيمة س الفعلية المعطاه فى التمرين

$$\bar{س} = \frac{مجـ\ س}{ن}$$

$مجـ (س - \bar{س})^{٢}$ = المقام الخاص لقانون $\hat{ب}$

- **تحديد القوة التفسيرية للنموذج الخطى البسيط** :

لتحديد القوة التفسيرية للنموذج ~~يتم~~ إيجاد معامل التحديد ويرمز له بالرمز ($ر^٢$) كالآتى :

$$\boxed{\text{معامل التحديد } (ر^٢) = \frac{\text{التغير المفسر (م . م . ر)}}{\text{التغير الكلى (م . م . ك)}}}$$

- **إيجاد معامل الارتباط (ر)** :

$$\boxed{\text{معامل الارتباط (ر)} = \sqrt{\text{معامل التحديد}}}$$

- **إيجاد المرونة للنموذج الخطى البسيط** :

$$\boxed{\text{المرونة} = \underline{\hat{ب}} \times \frac{\bar{س}}{\bar{ص}}}$$

حيث :

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ س}}{ن}$$

$$\bar{ص} = \frac{\text{مجـ ص}}{ن}$$

- **اختبار القوة التنبؤية للنموذج الخطى البسيط :**

القانون المستخدم : -

$$\text{ت المحسوبة} = \left| \frac{\text{ص} - \hat{\text{ص}}}{\sigma_{\hat{\text{ص}}}} \right|$$

حيث :

ص : القيمة الفعلية لـ ص (معطاه فى التمرين)

$\hat{\text{ص}}$: قيمة التنبؤ بنقطة

$|\ \ |$: تجاهل الإشارة السالبة

يتم مقارنة ت المحسوبة بقيمة ت الجدولية التى بدرجات حرية ن ــ ٢

إذا كانت

ت المحسوبة ≥ الجدولية

⬇

النموذج له قدرة تنبؤية عالية

إذا كانت

ت المحسوبة > الجدولية

⬇

النموذج ليس له قدرة تنبؤية عالية

تمـــارين متنـــوعة

تمرين (١)

تم جمع معلومات عن عينة عشوائية مكونة من ٥ أفراد لمعرفة العلاقة بين سعر إحدى السلع (س) والكمية المطلوبة منها (ص) فكانت النتائج :

سعر السلعة	٥	٧	٦	٨	٩
الكمية المطلوبة	١٢	١٠	١١	٧	٥

المطلوب : تقدير النموذج الخطى لدالة الطلب باستخدام ثلاث طرق مختلفة.

الحـــل

سعر السلعة (س)	الكمية المطلوبة (ص)	س ص	$س^{٢}$
٥	١٢	٦٠	٢٥
٧	١٠	٧٠	٤٩
٦	١١	٦٦	٣٦
٨	٧	٥٦	٦٤
٩	٥	٤٥	٨١
٣٥	٤٥	٢٩٧	٢٥٥

ن = عدد القيم أو حجم العينة = ٥

أولا : تقدير النموذج الخطى البسيط باستخدام طريقة الحذف :

الخطوات :

(١) يتم إيجاد قيمة أ̂ ، ب̂ عن طريق حل المعادلتين الطبيعيتين الآتيتين :

مجـ ص = ن أ + ب مجـ س

٤٥ = ٥ أ + ٣٥ ب

مجـ س ص = أ مجـ س + ب مجـ س^{٢}

٢٩٧ = ٣٥ أ + ٢٥٥ ب

∴ ٤٥ = ٥ أ + ٣٥ ب ‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏ (١) × ٧

٢٩٧ = ٣٥ أ + ٢٥٥ ب ‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏ (٢)

∴ ٣١٥ = ~~٣٥ أ~~ + ٢٤٥ ب

٢٩٧ = ~~٣٥ أ~~ + ٢٥٥ ب

بالطرح

١٨ = ـ ١٠ ب

∴ ب̂ = $\frac{١٨}{ـ ١٠}$ = $\boxed{ـ ١,٨}$

التعويض عن قيمة بَ̂ فى المعادلة رقم (١) :

٤٥ = ٥ أ̂ + ٣٥ ب̂

٤٥ = ٥ أ̂ + ٣٥ × ـ ١,٨

٤٥ = ٥ أ̂ ـ ٦٣

٤٥ + ٦٣ = ٥ أ̂

١٠٨ = ٥ أ̂

∴ أ̂ = ١٠٨ / ٥ = **[٢١,٦]**

(٢) **التعويض عن قيمة أ̂ ، ب̂ فى معادلة الانحدار الخطى البسيط الآتية :**

ص̂ = أ̂ + ب̂ س

[ص̂ = ٢١,٦ ـ ١,٨ س]

ثانيا : تقدير النموذج الخطى البسيط باستخدام الطريقة المختصرة :

الخطوات :

(١) يتم إيجاد قيمة $\hat{ب}$ كالآتى :

$$\hat{ب} = \frac{\text{مجـ س ص} - \frac{\text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن}}}{\text{مجـ س}^{٢} - \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}}}$$

$$= \frac{٢٩٧ - \frac{٣٥ \times ٤٥}{٥}}{٢٥٥ - \frac{(٣٥)^{٢}}{٥}}$$

$$= \frac{٢٩٧ - ٣١٥}{٢٥٥ - ٢٤٥}$$

$$= \frac{-١٨}{١٠}$$

$$= \boxed{-١{,}٨}$$

(٢) <u>يتم إيجاد قيمة</u> $\hat{\text{أ}}$ <u>كالآتى</u> :

$$\hat{\text{أ}} = \bar{\text{ص}} - \hat{\text{ب}}\ \bar{\text{س}}$$

حيث :

$$\bar{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} = \frac{٤٥}{٥} = \boxed{٩}$$

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{٣٥}{٥} = \boxed{٧}$$

$$\therefore\ \hat{\text{أ}} = \bar{\text{ص}} - \hat{\text{ب}}\ \bar{\text{س}}$$

$$= ٩ - (-١,٨) \times ٧$$

$$= ٩ + ١٢,٦$$

$$= \boxed{٢١,٦}$$

(٣) <u>التعويض عن قيمة</u> $\hat{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ <u>فى معادلة الانحدار الخطى البسيط الآتية</u> :

$$\hat{\text{ص}} = \hat{\text{أ}} + \text{ب س}$$

$$\boxed{\hat{\text{ص}} = ٢١,٦ - ١,٨\ \text{س}}$$

ثالثاً : تقدير النموذج الخطى البسيط باستخدام طريقة المصفوفات :

الخطوات :

(١) يتم تكوين مصفوفة المعاملات ونرمز لها بالرمز (سَ س) الآتية :

$$(\text{سَ س}) = \begin{pmatrix} \text{ن} & \text{مجـ س} \\ \text{مجـ س} & \text{مجـ س}^{٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٣٥ \\ ٣٥ & ٢٥٥ \end{pmatrix}$$

(٢) يتم إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات ونرمز لها بالرمز $(\text{سَ س})^{-١}$

وذلك بإتباع الخطوات الآتية :

(أ) يتم إيجاد المحدد العام للمصفوفة كالآتى :

$$\begin{pmatrix} ٥ & ٣٥ \\ ٣٥ & ٢٥٥ \end{pmatrix}$$

القطر الفرعى　　　　القطر الرئيسى

المحدد العام = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى − حاصل ضرب عناصر القطر الفرعى

المحدد العام = ٥ x ٢٥٥ − ٣٥ x ٣٥

= ١٢٧٥ − ١٢٢٥

= $\boxed{\text{٥٠}}$

(ب) <u>يتم إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات باستخدام القانون الآتى</u> :

معكوس مصفوفة المعاملات $(\text{سَ س})^{-1}$ = $\dfrac{\text{١}}{\text{المحدد العام}} \begin{pmatrix} \text{مجـ س} & \text{ن} \\ \text{مجـ س}^{\text{٢}} & \text{مجـ س} \end{pmatrix}$

يتم تغيير إشارة عناصر القطر الفرعى

يتم إبدال عناصر القطر الرئيسى مكان بعضهما

$$= \frac{\text{١}}{\text{٥٠}} \begin{pmatrix} \text{٣٥ −} & \begin{array}{c}\text{مجـ س}^{\text{٢}} \\ \uparrow \\ \text{٢٥٥}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{ن} \\ \uparrow \\ \text{٥}\end{array} & \text{٣٥ −} \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ (\text{سَ س})^{-1} = \frac{\text{١}}{\text{٥٠}} \begin{pmatrix} \text{٣٥ −} & \text{٢٥٥} \\ \text{٥} & \text{٣٥ −} \end{pmatrix}$$

(٣) <u>يتم إيجاد قيمة $\hat{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ كالآتى</u> :

$$\begin{pmatrix}\hat{\text{أ}}\\ \hat{\text{ب}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{معكوس مصفوفة المعاملات}\\ (\text{سَ س})^{-١}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{مصفوفة الثوابت}\\ (\text{سَ ص})\end{pmatrix}$$

<u>حيث</u> :

$$\text{مصفوفة الثوابت } (\text{سَ س}) = \begin{pmatrix}\text{مجـ ص}\\ \text{مجـ س ص}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٤٥\\ ٢٩٧\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}\hat{\text{أ}}\\ \hat{\text{ب}}\end{pmatrix} = \frac{١}{٥٠}\begin{pmatrix}٢٥٥ & -٣٥\\ -٣٥ & ٥\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}٤٥\\ ٢٩٧\end{pmatrix}$$

<u>حيث يتم ضرب كل صف من صفوف المصفوفة × العمود الموجود فى المصفوفة الثانية</u>

$$\begin{pmatrix}\hat{\text{أ}}\\ \hat{\text{ب}}\end{pmatrix} = \frac{١}{٥٠}\begin{pmatrix}٢٥٥ \times ٤٥ - ٣٥ \times ٢٩٧\\ -٣٥ \times ٤٥ + ٥ \times ٢٩٧\end{pmatrix}$$

$$= \frac{١}{٥٠}\begin{pmatrix}١١٤٧٥ - ١٠٣٩٥\\ -١٥٧٥ + ١٤٨٥\end{pmatrix}$$

$$= \frac{١}{٥٠}\begin{pmatrix}١٠٨٠\\ -٩٠\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\text{أ}} \\ \hat{\text{ب}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١٠٨٠}{٥٠} \\ \frac{-٩٠}{٥٠} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\text{أ}} \\ \hat{\text{ب}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢١,٦ \\ -١,٨ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \hat{\text{أ}} = ٢١,٦$$

$$\hat{\text{ب}} = -١,٨$$

(٤) <u>يتم التعويض عن قيم أ̂ ، ب̂ فى معادلة الإنحدار الخطى البسيط الآتية</u> :

$$\hat{\text{ص}} = \hat{\text{أ}} + \hat{\text{ب}}\,\text{س}$$

$$\boxed{\hat{\text{ص}} = ٢١,٦ - ١,٨\,\text{س}}$$

تمرين (٢)

لدراسة العلاقة بين الدخل (س) والإنفاق على إحدى السلع (ص) تم سحب عينة عشوائية من ١٠ أسر وتم تسجيل الدخل والانفاق لكل أسرة فتوافرت لديك البيانات الآتية :

مجـ س = ٥٥ ، مجـ ص = ٣٠ ، مجـ س ص = ٢٠٤ ،

مجـ $س^{٢}$ = ٣٨٥ ، مجـ $ص^{٢}$ = ١١٠ .

المطلوب :

(١) تقدير النموذج الخطى للإنفاق ثم اختبر جوهرية هذا النموذج.

(٢) التنبؤ بقيمة الإنفاق إذا علمت أن الدخل = ١٢ وذلك :

أولاً : التنبؤ بنقطة ثانياً : التنبؤ بفترة ثقة ٩٥٪

(٣) إيجاد القوة التفسيرية للنموذج

(٤) إيجاد مرونة الدخل ثم فسر معناها

(٥) اختبار القدرة التنبؤية للنموذج إذا علمت أن قيمة الدخل الفعلية تساوى ٧

إذا علمت أن :

ف الجدولية بدرجات حرية (١ ، ٨)٠= ٥,٣٢

ف الجدولية بدرجات حرية (١ ، ٩) = ٥,١٢

ت الجدولية بدرجات حرية (٨) = ٢,٣٠٦

ت الجدولية بدرجات حرية (٩) = ٢,٢٦٢

الحـــــل

(١) <u>تقدير النموذج الخطى للإنفاق</u> :

يلاحظ أنه لم يذكر فى التمرين الطريقة المستخدمة لتقدير النموذج الخطى ، لذلك فأنه من الأفضل استخدام <u>الطريقة المختصـرة</u> .

<u>الخطوات</u> :

(١) <u>يتم إيجاد قيمة $\hat{ب}$ كالآتى</u> :

$$\hat{ب} = \frac{\text{مجـ س ص} - \dfrac{\text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن}}}{\text{مجـ س}^{٢} - \dfrac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}}}$$

$$= \frac{٢٠٤ - \dfrac{٥٥ \times ٣٠}{١٠}}{٣٨٥ - \dfrac{(٥٥)^{٢}}{١٠}}$$

$$= \frac{٢٠٤ - ١٦٥}{٣٨٥ - ٣٠٢{,}٥}$$

$$= \frac{٣٩}{٨٢{,}٥} = \boxed{٠{,}٤٧٣}$$

(٢) يتم إيجاد قيمة $\hat{أ}$ كالآتي :

$$\hat{أ} = \bar{ص} - \hat{ب}\ \bar{س}$$

حيث :

$$\bar{ص} = \frac{مجـ\ ص}{ن} = \frac{٣٠}{١٠} = ٣$$

$$\bar{س} = \frac{مجـ\ س}{ن} = \frac{٥٥}{١٠} = ٥,٥$$

$$\hat{ب} = ٠,٤٧٣$$

$$\therefore\ \hat{أ} = \bar{ص} - \hat{ب}\ \bar{س}$$

$$= ٣ - ٠,٤٧٣ \times ٥,٥$$

$$= ٣ - ٢,٦٠١٥$$

$$= \boxed{٠,٣٩٩}$$

(٣) التعويض عن قيمة $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ في معادلة الانحدار الخطي البسيط الآتية :

$$\hat{ص} = \hat{أ} + \hat{ب}\ س$$

$$\boxed{\hat{ص} = ٠,٣٩٩ + ٠,٤٧٣\ س}$$

اختبار جوهرية النموذج :

خطوات الاختبار :

(١) التغير الكلى (م ٠ م ٠ ك) = مجـ (ص ـ صَ)^{٢}

= مجـ ص^{٢} ـ $\frac{(\text{مجـ ص})^{٢}}{\text{ن}}$

= ١١٠ ـ $\frac{(٣٠)^{٢}}{١٠}$

= ١١٠ ـ ٩٠

= $\boxed{٢٠}$

(٢) التغير المفسر (م ٠ م ٠ ر) = بَ مجـ (س ـ سَ) (ص ـ صَ)

= بَ $\left(\text{مجـ س ص} - \frac{\text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن}}\right)$

البسط الخاص لقانون بَ

= ٠,٤٧٣ × ٣٩

= $\boxed{١٨,٤٤٧}$

(٣) التغير العشوائى (م ٠ م٠ ى) = م ٠ م ٠ ك ـ م ٠ م ٠ ر

= ٢٠ ـ ١٨,٤٤٧

= $\boxed{١,٥٥٣}$

(٤) يتم عمل جدول تحليل التباين الآتى :

$$\frac{\text{مجموع المربعات}}{\text{درجات الحرية}}$$

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات (التباين)	ف المحسوبة
المفسر	١٨,٤٤٧	١	$\frac{١٨,٤٤٧}{١} = \boxed{١٨,٤٤٧}$	$\frac{١٨,٤٤٧}{٠,١٩٤} \div$
العشوائى	١,٥٥٣	ن ـ ٢ ١٠ ـ ٢ ٨	$\frac{١,٥٥٣}{٨} = \boxed{٠,١٩٤}$	$= \boxed{٩٥,٠٨}$
الكلى	٢٠		$\boxed{٠,١٩٤}$ تباين التقدير (σ^2)	

(٥) يتم مقارنة قيمة ف المحسوبة بقيمة ف الجدولية التى بدرجات حرية (١ ، ن ـ ٢) أى بدرجات حرية (١ ، ٨)

ف المحسوبة	ف الجدولية التى بدرجات حرية (١ ، ٨)
٩٥,٠٨	٥,٣٢

∴ النموذج جوهرى بمعنى أن المتغير المستقل (س) له تأثير جوهرى على المتغير التابع (ص).

(٢) التنبؤ بقيمة الانفاق (ص) إذا علمت أن الدخل (س) = ١٢ :

أولا : التنبؤ بنقطة :

فى هذه الحالة يتم التعويض عن قيمة س المعطاه فى التمرين فى معادلة الإنحدار الخطى البسيط فنحصل على قيمة $\hat{ص}$.

$$\hat{ص} = ٠,٣٩٩ + ٠,٤٧٣ \; س$$

$$\hat{ص} = ٠,٣٩٩ + ٠,٤٧٣ \times ١٢$$

$$= ٠,٣٩٩ + ٥,٦٧٦ = \boxed{٦,٠٧٥}$$

ثانيا : التنبؤ بفترة ثقة ٩٥٪ :

القانون المستخدم :

$$\boxed{\hat{ص} \pm \underline{ت} \times \sigma_{\hat{ص}}}$$

حيث :

$\hat{ص}$: التنبؤ بنقطة = ٦,٠٧٥

ت : قيمة ت الجدولية التى بدرجات حرية (ن – ٢) أى بدرجات حرية (٨) = ٢,٣٠٦

$$\sigma_{ص} = \sigma \sqrt{1 + \frac{1}{ن} + \frac{(س_ف - \bar{س})^2}{مجـ (س - \bar{س})^2}}$$

حيـث :

$$\sigma = \sqrt{تباين\ التقدير} = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.194} = 0.44$$

$$ن = حجم\ العينة = 10$$

$$س_ف = قيمة\ س\ الفعلية\ المعطاه\ فى\ التمرين = 12$$

$$\bar{س} = \frac{مجـ\ س}{ن} = \frac{55}{10} = 5.5$$

$$مجـ (س - \bar{س})^2 = المقام\ الخاص\ لقانون\ \hat{ب} = 82.5$$

$$\therefore \sigma_{\hat{ص}} = \sigma \sqrt{1 + \frac{1}{ن} + \frac{(س_ف - \bar{س})^2}{مجـ (س - \bar{س})^2}}$$

$$= 0.44 \sqrt{1 + \frac{1}{10} + \frac{(12 - 5.5)^2}{82.5}}$$

$$= 0.44 \sqrt{1 + 0.1 + \frac{42.25}{82.5}}$$

$$= ٠,٤٤ \sqrt{١ + ٠,١ + ٠,٥١٢}$$

$$= ٠,٤٤ \sqrt{١,٦١٢}$$

$$\hat{\sigma}_{\text{ص}} = ٠,٤٤ \times ١,٢٦٩ = \boxed{٠,٥٦}$$

$$\therefore \quad \hat{\text{ص}} \pm \text{ت} \times \hat{\sigma}_{\text{ص}}$$

$$٦,٠٧٥ \pm ٢,٣٠٦ \times ٠,٥٦$$

$$٦,٠٧٥ \pm ١,٢٩١٣٦$$

$$\therefore \text{الحد الأدنى} = ٦,٠٧٥ - ١,٢٩١٣٦ = \boxed{٤,٧٨٣٦٤}$$

$$\text{الحد الأعلى} = ٦,٠٧٥ + ١,٢٩١٣٦ = \boxed{٧,٣٦٦٣٦}$$

(٣) **إيجاد القوة التفسيرية للنمـوذج :**

ويتم ذلك عن طريق إيجاد معامل التحديد ($\text{ر}^{٢}$) :

$$\text{معامل التحديد } (\text{ر}^{٢}) = \frac{\text{التغير المفسر (م م ر)}}{\text{التغير الكلـى (م م ك)}}$$

$$= \frac{١٨,٤٤٧}{٢٠} = \boxed{٠,٩٢}$$

(٤) **إيجاد مرونة الدخل مع تفسير معناها**:

$$\text{المرونة} = \hat{ب} \times \frac{\bar{س}}{\bar{ص}}$$

$$= ٠,٤٧٣ \times \frac{٥,٥}{٣} = \boxed{٠,٨٦}$$

وهذا يعنى أنه إذا زاد الدخل (س) بمقدار ١٪ فسوف يؤدى إلى زيادة فى الإنفاق (ص) بمقدار ٠,٨٦٪.

(٥) **إختبار القدرة التنبؤية للنموذج إذا كان قيمة الدخل الفعلية (ص) = ٧**

القانون المستخدم:

$$\text{ت المحسوبة} = \left| \frac{ص - \hat{ص}}{\sigma_{\hat{ص}}} \right|$$

حيث:

ص : القيمة الفعلية للدخل = ٧

$\hat{ص}$: التنبؤ بنقطة = ٦,٠٧٥

$\sigma_{\hat{ص}}$: الخطأ المعيارى للتنبؤ = ٠,٥٦

$$\therefore \text{ت المحسوبة} = \left| \frac{ص - \hat{ص}}{\sigma_{\hat{ص}}} \right| = \left| \frac{٧ - ٦,٠٧٥}{٠,٥٦} \right| = \boxed{١,٦٥}$$

يتم مقارنة قيمة ت المحسوبة بقيمة ت الجدولية التى بدرجات حرية (ن ـ ٢) أى بدرجات حرية (٨)

ف المحسوبة ف الجدولية التى بدرجات حرية (٨)

١,٦٥ ٢,٣٠٦

∴ النموذج له قدرة تنبؤية عاليـة.

تمرين (٣)

لدراسة العلاقة بين الدخل (س) بالألف جنيه والانفاق على إحدى السلع (ص) بالألف جنيه تم سحب عينة عشوائية من ١٠ أسر وتم تسجيل الدخل والإنفاق لكل أسرة فوجد أن النموذج الخطى للإنفاق يأخذ الشكل الآتى :

صَ = ١٢ + ٠,٣ س حيث : ص : متوسط الانفاق ، س : متوسط الدخل

فإذا علمت أن :

مج س = ١٦٠ ، مج $س^٢$ = ٢٦٠٠

مج $(ص - صَ)^٢$ = ١٠٠ ، تباين التقدير = ٣,٧٥

المطلوب :

(١) إختبار جوهرية النموذج الخطى للإنفاق إحصائياً. ثم إستخدم هذا النموذج للتنبؤ بقيمة إنفاق أسرة دخلها ٢٠ ألف جنيه وذلك بفترة ثقة ٩٥٪.

(٢) معرفة إلى أى حد يعتبر الدخل مسئولاً عن التغير فى الإنفاق.

مع العلم بأن :

ف الجدولية بدرجات حرية (١ ، ٨) = ٥,٢

ت الجدولية بدرجات حرية (٨) = ٢,٣٠٦

الحـــــل

ن = ١٠ $\sigma^٢$ (تباين التقدير) = ٣,٧٥

ص = ١٢ + ٠,٣ س

$\hat{أ}$ $\hat{ب}$

∴ $\hat{أ}$ = ١٢ $\hat{ب}$ = ٠,٣

(١) اختبار جوهرية النموذج الخطى للإنفاق :

الخطوات :

(١) التغير الكلى (م • م • ك) = مجـ (ص ـ صَ)^٢ = $\boxed{١٠٠}$

(٢) التغير المفسر (م • م • ر) = $\hat{ب}$ مجـ (س ـ سَ) (ص ـ صَ)

غير معطاه فى التمرين

(٣) التغير العشوائى (م • م • ى) = م • م • ك ـ م • م • ر

(٤) يتم عمل جدول تحليل التباين :

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات (التباين)	ف المحسوبة
المفسر	(١٠٠-٣٠) ↑ ٧٠	١	$\frac{٧٠}{١} = \boxed{٧٠}$	$\frac{٧٠}{٣,٧٥} \div$
العشوائى	(٣,٧٥×٨) ↑ ٣٠	ن ـ ٢ ١٠ ـ ٢ ٨	$= \boxed{٣,٧٥}$	$= \boxed{١٨,٦}$
الكلى	١٠٠	تباين التقدير ($\sigma^{٢}$)		

(٥) يتم مقارنة قيمة ف المحسوبة بقيمة ف الجدولية التى بدرجات حرية (١ ، ٨)

ف المحسوبة ‏ ف الجدولية

١٨,٦ > ٥,٢

∴ النموذج جوهرى بمعنى أن المتغير المستقل (س) له تأثير جوهرى على المتغير التابع (ص).

التنبؤ بقيمة الانفاق (ص) إذا علمت أن الدخل (س) = ٢٠ :

أولا : التنبؤ بنقطة :

$\hat{ص}$ = ١٢ + ٠,٣ س

$\hat{ص}$ = ١٢ + ٠,٣ × ٢٠ = $\boxed{١٨}$

ثانيا : التنبؤ بفترة ثقة :

القانون المستخدم :

$$\boxed{\hat{ص} \pm ت \times \sigma_{\hat{ص}}}$$

حيث :

$\hat{ص}$: التنبؤ بنقطة = ١٨

ت : قيمة ت الجدولية التى بدرجات حرية (٨) = ٢,٣٠٦

$$\sigma_{\hat{ص}} = \sigma \sqrt{١ + \frac{١}{ن} + \frac{(س_ن - \bar{س})^٢}{مجـ (س - \bar{س})^٢}}$$

حيث :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^٢} = \sqrt{٣,٧٥} = ١,٩$$

ن = ١٠

سِن = قيمة س الفعلية المعطاه فى التمرين = ٢٠

$$\bar{س} = \frac{مجـ\ س}{ن} = \frac{١٦٠}{١٠} = ١٦$$

$$مجـ(س - \bar{س})^٢ = مجـ\ س^٢ - \frac{(مجـ\ س)^٢}{ن}$$

$$= ٢٦٠٠ - \frac{(١٦٠)^٢}{١٠} = ٤٠$$

$$\therefore \hat{\sigma}_{ص} = \sigma \sqrt{١ + \frac{١}{ن} + \frac{(سِن - \bar{س})^٢}{مجـ(س - \bar{س})^٢}}$$

$$= ١,٩ \sqrt{١ + \frac{١}{١٠} + \frac{(٢٠ - ١٦)^٢}{٤٠}}$$

$$= ١,٩ \sqrt{١ + ٠,١ + ٠,٤}$$

$$\hat{\sigma}_{ص} = ١,٩ \times ١,٥ = \boxed{٢,٨٥}$$

$\therefore$ ص̂ $\pm$ ت $\times$ σص̂

$\overline{١٨}$ $\pm$ ٢,٣٠٦ $\times$ ٢,٨٥

١٨ $\pm$ ٦,٥٧٢١

$\therefore$ الحد الأدنى = ١٨ − ٦,٥٧٢١ = $\boxed{١١,٤٢٧٩}$

الحد الأعلى = ١٨ + ٦,٥٧٢١ = $\boxed{٢٤,٥٧٢١}$

(٢) <u>إلى أى حد يعتبر الدخل (س) مسئولاً عن التغير فى الانفاق (ص)</u> :

وهذا يعنى إيجاد معامل التحديد (ر^{٢}) :

$$\text{معامل التحديد (ر}^{٢}\text{)} = \frac{\text{التغير المفسر (م ٠ م ٠ ر)}}{\text{التغير الكلى (م ٠ م ٠ ك)}}$$

$$= \frac{٧٠}{١٠٠} = \boxed{٠,٧٠}$$

وهذا يعنى أن الدخل مسئول عن التغير فى الإنفاق بنسبة ٧٠٪.

تمرين (٤)

جمعت بيانات عينة عشوائية لمجموعة من الأفراد لدراسة العلاقة بين الدخل (س) والاستهلاك (ص) فكانت :

$$(\bar{س}\ س) = \begin{pmatrix} ٥ & ٤٠ \\ ٤٠ & ٣٦٠ \end{pmatrix}$$

$$(\bar{س}\ ص) = \begin{pmatrix} ٣٢٠ \\ ٢٨٢٠ \end{pmatrix}$$

$$مجـ\ ص^{٢} = ٢٢٢٠٠$$

<u>المطلوب</u> :

(١) تقدير النموذج الخطى للإستهلاك ثم أختبر جوهريته.

(٢) معرفة إلى أى حد يعتبر الدخل مسئولا عن التغير فى الإستهلاك.

(٣) إيجاد مرونة الدخل ثم فسر معناه.

مع العلم بأن ف الجدولية بدرجات حرية (١ ، ٣) = ١٠,١٣

الحــــــل

(١) تقدير النموذج الخطى باستخدام طريقة المصفوفات :

الخطوات :

(١) يتم تكوين مصفوفة المعاملات (سَ س) ⟵ معطاه فى التمرين

$$(\text{سَ س}) = \begin{pmatrix} ٤٠ & ٥ \\ ٣٦٠ & ٤٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{مجـ س} & \text{ن} \\ \text{مجـ س}^{٢} & \text{مجـ س} \end{pmatrix}$$

وهذا يعني أن :

ن = ٥   مجـ س = ٤٠   مجـ $\text{س}^{٢}$ = ٣٦٠

(٢) يتم إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات وذلك بإتباع الخطوات الآتية :

(أ) يتم إيجاد المحدد العام للمصفوفة كالآتى :

$$\begin{vmatrix} ٤٠ & ٥ \\ ٣٦٠ & ٤٠ \end{vmatrix}$$

القطر الرئيسى   القطر الفرعى

$$\text{المحدد العام} = \text{حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى} - \text{حاصل ضرب عناصر القطر الفرعى}$$

$$= ٣٦٠ \times ٥ - ٤٠ \times ٤٠$$

$$= ١٨٠٠ - ١٦٠٠$$

$$= \boxed{٢٠٠}$$

(ب) <u>يتم إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات باستخدام القانون الآتى</u> :

$$\text{معكوس مصفوفة المعاملات} = \frac{١}{\text{المحدد العام}} \begin{pmatrix} \text{مجـ س} & \text{ن} \\ \text{مجـ س}^{٢} & \text{مجـ س} \end{pmatrix}$$

$(\text{سَ س})^{-١}$

يتم تغيير إشارة عناصر القطر الفرعى

يتم إبدال عناصر القطر الرئيسى مكان بعضهما

$$= \frac{١}{٢٠٠} \begin{pmatrix} -٤٠ & ٣٦٠ \\ ٥ & -٤٠ \end{pmatrix}$$

(٣) <u>يتم إيجاد قيمة $\hat{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ كالآتى</u> :

$$\begin{pmatrix} \hat{\text{أ}} \\ \hat{\text{ب}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{معكوس مصفوفة المعاملات} \\ (\text{س}'\text{س})^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{مصفوفة الثوابت} \\ (\text{س}'\text{ص}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{١}{٢٠٠} \begin{pmatrix} ٣٦٠ & -٤٠ \\ -٤٠ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\text{مجـ ص}) \\ ٣٦٠ \\ (\text{مجـ س ص}) \\ ٢٨٢٠ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{١}{٢٠٠} \begin{pmatrix} ٣٦٠ \times ٣٢٠ - ٤٠ \times ٢٨٢٠ \\ -٤٠ \times ٣٢٠ + ٥ \times ٢٨٢٠ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{١}{٢٠٠} \begin{pmatrix} ٢٤٠٠ \\ ١٣٠٠ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\text{أ}} \\ \hat{\text{ب}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ \\ ٦,٥ \end{pmatrix}$$

(٤) يتم التعويض عن قيم $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ في معادلة الإنحدار الخطى البسيط الآتية :

$$\hat{ص} = \hat{أ} + \hat{ب}\ س$$

$$\boxed{\hat{ص} = ١٢ - ٦,٥\ س}$$

اختبار جوهرية النموذج :

الخطوات :

(١) التغير الكلى (م ٠ م ٠ ك) = مجـ (ص ـ $\bar{ص}$)^٢

$$= مجـ\ ص^٢ - \frac{(مجـ\ ص)^٢}{ن}$$

$$= ٢٢٢٠٠ - \frac{(٣٢٠)^٢}{٥}$$

$$= ٢٢٢٠٠ - ٢٠٤٨٠$$

$$= \boxed{١٧٢٠}$$

(٢) التغير المفسر (م ٠ م ٠ ر) = $\hat{ب}$ مجـ (س ـ $\bar{س}$) (ص ـ $\bar{ص}$)

$$= \hat{ب}\left(مجـ\ س\ ص - \frac{مجـ\ س \times مجـ\ ص}{ن}\right)$$

$$= ٦,٥\left(٢٨٢٠ - \frac{٤٠ \times ٣٢٠}{٥}\right) = \boxed{١٦٩٠}$$

(٣) التغير العشوائى (م • م• ى) = م • م • ك − م • م • ر

= ١٧٢٠ − ١٦٩٠

= $\boxed{٣٠}$

(٤) يتم عمل جدول تحليل التباين الآتى :

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات (التباين)	ف المحسوبة
المفسر	١٦٩٠	١	$\frac{١٦٩٠}{١} = \boxed{١٦٩٠}$	$\frac{١٦٩٠}{١٠}$ ÷
العشوائى	٣٠	ن − ٢ ٣	$\frac{٣٠}{٣} = \boxed{١٠}$	= $\boxed{١٦٩}$
الكلى	١٧٢٠			

(٥) يتم مقارنة قيمة ف المحسوبة بقيمة ف الجدولية التى بدرجات حرية (١ ، ٣) .

ف المحسوبة	ف الجدولية
١٦٩	١٠,١٣

∴ النموذج جوهرى .

(٢) إلى اى حد يعتبر الدخل (س) مسئولا عن التغير فى الاستهلاك (ص) :

وهذا يعنى إيجاد معامل التحديد $(ر^٢)$:

$$\text{معامل التحديد } (ر^٢) = \frac{\text{التغير المفسر (م • م • ر)}}{\text{التغير الكلى (م • م • ك)}}$$

$$= \frac{١٦٩٠}{١٧٢٠} = \boxed{٠,٩٨}$$

وهذا يعنى أن الدخل (س) مسئول عن التغير فى الاستهلاك بنسبة ٩٨٪.

(٣) إيجاد مرونة الدخل :

$$\text{مرونة الدخل} = \hat{ب} \times \frac{\bar{س}}{\bar{ص}}$$

حيث :

$$\hat{ب} = ٦,٥$$

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ س}}{ن} = \frac{٤٠}{٥} = \boxed{٨}$$

$$\bar{ص} = \frac{\text{مجـ ص}}{ن} = \frac{٣٢٠}{٥} = \boxed{٦٤}$$

$$\text{مرونة الدخل} = \hat{ب} \times \frac{\bar{س}}{\bar{ص}}$$

$$= ٦,٥ \times \frac{٨}{٦٤} = \boxed{٠,٨١}$$

وهذا يعنى أنه إذا زاد الدخل (س) بمقدار ١٪ فسوف يؤدى إلى زيادة الاستهلاك بمقدار ٠,٨١٪.

ثانيا : نموذج الدالة الأسية :

معادلة نموذ ج الدالة الأسية :

$$\boxed{\hat{ص} = \hat{أ} \times س^{\hat{ب}}}$$

وبأخذ اللوغاريتم للطرفين :

$$\boxed{لو_{هـ}\ \hat{ص} = لو_{هـ}\ \hat{أ} + \hat{ب}\ لو_{هـ}\ س}$$

ولتقدير هذا النموذج هناك طريقتين :

طريقة المصفوفات — الطريقة المختصرة

$\boxed{1}$ تقدير نموذج الدالة الأسية باستخدام الطريقة المختصـــرة :

الخطـوات :

(١) يتم إيجاد قيمة $\hat{ب}$ كالآتى :

$$\hat{ب} = \frac{\text{مجـ}\,(س_ب - \bar{س}_ب)\,(ص_ب - \bar{ص}_ب)}{\text{مجـ}\,(س_ب - \bar{س}_ب)^{٢}} = \frac{\text{مجـ}\,س_ب\,ص_ب - \dfrac{\text{مجـ}\,س_ب \times \text{مجـ}\,ص_ب}{ن}}{\text{مجـ}\,س_ب^{٢} - \dfrac{(\text{مجـ}\,س_ب)^{٢}}{ن}}$$

حيـــث :

$س_ب = \text{لو}_{هـ}\,س$ $\qquad$ $ص_ب = \text{لو}_{هـ}\,ص$

ملاحظـة :

يتم إيجاد $\text{لو}_{هـ}$ لأى رقم عن طريق الضغط على زرار Ln فى الآلة الحاسبة

(٢) <u>يتم إيجاد لوهـ $\hat{\text{أ}}$</u> كالآتى :

$$\boxed{\text{لوهـ}\ \hat{\text{أ}} = \bar{\text{ص}}_{.} - \hat{\text{ب}}\ \bar{\text{س}}_{.}}$$

<u>حيـث</u> :

$$\bar{\text{ص}}_{.} = \frac{\text{مجـ ص}_{.}}{\text{ن}}$$

$$\bar{\text{س}}_{.} = \frac{\text{مجـ س}_{.}}{\text{ن}}$$

(٣) <u>يتم التعويض عن قيمة $\hat{\text{ب}}$ ، لو $\hat{\text{أ}}$ فى نموذج الدالة الأسية بعد تحويلها إلى الصورة اللوغاريتمية الآتى</u> :

$$\boxed{\text{لوهـ}\ \hat{\text{ص}} = \text{لوهـ}\ \hat{\text{أ}} \times \hat{\text{ب}}\ \text{لوهـ س}}$$

<u>ملاحظـة هامـة</u> :

يلاحظ أن الخطوات السابقة هى نفس خطوات تقدير النموذج الخطى البسيط باستخدام الطريقة المختصرة مع استبدال الرمز س بالرمز س. والرمز ص بالرمز ص. .

$\boxed{٢}$ تقدير نموذج الدالة الأسية باستخدام طريقة المصفوفات :

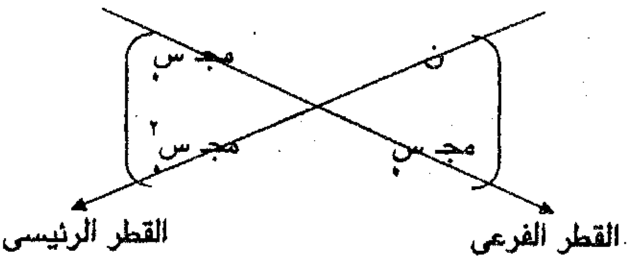
الخطوات :

(١) <u>يتم تكوين مصفوفة المعاملات ونرمز لها بالرمز (سَ سب)</u> :

$$(\text{سَ س}_{ب}) = \begin{pmatrix} \text{ن} & \text{مجـ س}_{ب} \\ \text{مجـ س}_{ب} & \text{مجـ س}_{ب}^{٢} \end{pmatrix}$$

(٢) <u>يتم إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات ونرمز لها $(\text{سَ س}_{ب})^{-١}$ وذلــــك</u>
<u>باتباع الخطوات الآتية :</u>

(أ) <u>يتم إيجاد المحدد العام لمصفوفة المعاملات كالآتى :</u>



المحدد العام = (حاصل ضرب عناصر **القطر الرئيسى**) − (حاصل ضرب عناصر **القطر الفرعى**)

(ب) يتم إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات باستخدام القانون الآتي :

$$\text{معكوس مصفوفة المعاملات } (\text{سَ س})^{-1} = \frac{1}{\text{المحدد العام}} \begin{pmatrix} \text{مجـ س}^{2} & \text{مجـ س} \\ \text{مجـ س} & \text{ن} \end{pmatrix}$$

يتم تغيير إشارة عناصر القطر الفرعى

يتم إبدال عناصر القطر الرئيسى مكان بعضهما

(٣) يتم إيجاد قيمة لوهـ $\hat{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ كالآتى :

$$\begin{pmatrix} \text{لو } \hat{\text{أ}} \\ \hat{\text{ب}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{معكوس مصفوفة المعاملات} \\ (\text{سَ س})^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{مصفوفة الثواب} \\ (\text{سَ ص}) \end{pmatrix}$$

حيث :

$$\text{مصفوفة الثوابت } (\text{سَ ص}) = \begin{pmatrix} \text{مجـ ص} \\ \text{مجـ س ص} \end{pmatrix}$$

(٤) يتم التعويض عن قيمة لو $\hat{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ فى نموذج الدالة الأسية بعد تحويلها إلى الصورة اللوغاريتمية الآتية :

$$\boxed{\text{لوهـ } \hat{\text{ص}} = \text{لوهـ } \hat{\text{أ}} \times \hat{\text{ب}} \text{ لوهـ س}}$$

ملاحظـة :

إذا لم يذكر فى التمرين الطريقة المستخدمة فى تقدير نموذج الدالة - الأسية فإنه من الأفضل استخدام الطريقة المختصرة.

- **اختبار جوهرية (معنوية) نموذج الدالة الأسية :**

خطوات هذا الاختبار هى نفس خطوات اختبار جوهرية النموذج الخطى البسيط مع استبدال الرمز س بالرمز $س_{\cdot}$. واستبدال الرمز ص بالرمز $ص_{\cdot}$.

حيـث :

$س_{\cdot}$ = $لو_{هـ}$ س $ص_{\cdot}$ = $لو_{هـ}$ ص

- **استخدام نموذج الدالة الأسية فى التنبـؤ :**

أولاً - التنبـؤ بنقطة :

فى هذه الحالة يتـم التعـويض عن قيمـة س المعطاه فى التمرين فى الدالة الأسية بعد تحويلها إلى الصورة اللوغاريتمية فنحصل على قيمة $لو_{هـ}$ $\hat{ص}$

ثانياً - التنبؤ بفترة ثقة :

القانون المستخدم :

$$\boxed{\hat{ص}_{ه} \pm ت \times \sigma_{\hat{ص}_{ه}}}$$

حيث :

$\hat{ص}_{ه}$: قيمة التنبؤ بنقطة = لو$_{هـ}$ $\hat{ص}$

ت : قيمة ت الجدولية التى بدرجات حرية (ن - ٢)

$\sigma_{\hat{ص}_{ه}}$: الخطأ المعيارى للتبنؤ ويتم حسابه كالآتى :

$$\boxed{\sigma_{\hat{ص}_{ه}} = \sigma \sqrt{1 + \frac{1}{ن} + \frac{(س_{ف} - \bar{س}_{ه})^{2}}{مجـ(س_{ه} - \bar{س}_{ه})^{2}}}}$$

حيث :

$$\sigma = \sqrt{تباين التقدير} = \sqrt{\sigma^{2}}$$

$س_{ف}$ = قيمة س الفعلية المعطاه فى التمرين

$س_{هف}$ = لو$_{هـ}$ $س_{ف}$

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ } س_و}{ن}$$

$\text{مجـ } (س_و - \bar{س})^2$ = المقام الخاص لقانون $\hat{ب}$

- **<u>تحديد القوة التفسيرية لنموذج الدالة الأسية</u>** :

$$\boxed{\text{معامل التحديد } (ر^2) = \frac{\text{التغير المفسر (م . م . ر)}}{\text{التغير الكلى (م . م . ك)}}}$$

- **<u>إيجاد المرونة لنموذج الدالة الأسية</u>** :

$$\boxed{\text{المرونة} = \hat{ب}}$$

- **<u>اختبار القوة التنبؤية لنموذج الدالة الأسية</u>** :

<u>القانون المستخدم</u> :

$$\boxed{\text{ت المحسوبة} = \left| \frac{ص_و - \hat{ص}_و}{\sigma_{\hat{ص}_و}} \right|}$$

حيث :

ص : القيمة الفعلية لـ ص (معطاه فى التمرين)

ص, : لوهـ ص

$\hat{ص}$, : قيمة التنبؤ بنقطة = لوهـ $\hat{ص}$

| | : تجاهل الإشارة السالبة

يتم مقارنة ت المحسوبة بقيمة ت الجدولية التى بدرجات حرية ن ـ ٢

إذا كانت	إذا كانت
ت المحسوبة $\geq$ ت الجدولية	ت المحسوبة $<$ ت الجدولية
$\Downarrow$	$\Downarrow$
النموذج له قدرة تنبؤية عالية	النموذج ليس له قدرة تنبؤية عالية

تمـــارين متنـــوعة

تمرين (١)

الجدول الآتى يوضح بيانات عن عدد العمال وعدد الوحدات المنتجة فى أحد مصانع الغزل والنسيج :

عدد العمـــال	٥	٧	٩	١٠	١١
عدد الوحدات المنتجة	٨	١٢	١٧	٢٠	٢٣

المطلوب :

(١) تقدير نموذج دالة الإنتاج الأسية ثم إختبر جوهرية النموذج المقدر.

(٢) التنبؤ بعدد الوحدات المنتجة (حجم الإنتاج) إذا علمت أن عدد العمال = ١٥ .

إذا علمت أن :

ف الجدولية بدرجات حرية (١ ، ٣) = ١٠,١٣

ف الجدولية بدرجات حرية (١ ، ٨) = ٥,٣٢

ف الجدولية بدرجات حرية (٣) = ٣,١٨٢

ف الجدولية بدرجات حرية (٨) = ٢,٣٠٦

الحـــــل

لوهـ س　　　لوهـ ص

عدد العمال (س)	عدد الوحدات المنتجة (ص)	س.	ص.	س.ص.	س.٢	ص.٢
٥	٨	١,٦٠٩٤	٢,٠٧٩٤	٣,٣٤٦٦	٢,٥٩٠٢	٤,٣٢٣٩
٧	١٢	١,٩٤٥٩	٢,٤٨٤٩	٤,٨٣٥٤	٣,٧٨٦٥	٦,١٧٤٧
٩	١٧	٢,١٩٧٢	٢,٨٣٣٢	٦,٢٢٥١	٤,٨٢٧٧	٨,٠٢٧٠
١٠	٢٠	٢,٣٠٢٦	٢,٩٩٥٧	٦,٨٩٧٩	٥,٣٠١٩	٨,٩٧٤٢
١١	٢٣	٢,٣٩٧٩	٣,١٣٥٥	٧,٥١٨٦	٥,٧٤٩٩	٩,٨٣١٤
		١٠,٤٥٣	١٣,٥٢٨٧	٢٨,٨٢٣٦	٢٢,٢٥٦٣	٣٧,٣٣١٢

ملاحظـــة :

يتم إيجاد لوهـ س ، لوهـ ص عن طريق الضغط على زرار Ln في الآلة الحاسبة.

(١) تقدير نموذج الدالة الأسية باستخدام الطريقة المختصرة :

الخطوات :

(١) يتم إيجاد قيمة $\hat{ب}$ كالآتى :

$$\hat{ب} = \frac{\text{مجـ س ص} - \frac{\text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن}}}{\text{مجـ س}^{2} - \frac{(\text{مجـ س})^{2}}{\text{ن}}}$$

$$= \frac{٢٨,٨٢٣٦ - \frac{١٣,٥٢٨٧ \times ١٠,٤٥٣}{٥}}{٢٢,٢٥٦٣ - \frac{(١٠,٤٥٣)^{2}}{٥}}$$

$$= \frac{٢٨,٨٢٣٦ - ٢٨,٢٨٣١}{٢٢,٢٥٦٣ - ٢١,٨٥٣٠٤٢}$$

$$= \frac{٠,٥٤٠٥}{٠,٤٠٣٣}$$

$$= \boxed{١,٣٤}$$

(٢) يتم إيجاد قيمة $لو_{هـ} \hat{أ}$ كالآتى :

$$لو_{هـ} \hat{أ} = \bar{ص} - \hat{ب} \, \bar{س}$$

حيث :

$$\bar{ص} = \frac{مجـ \, ص}{ن} = \frac{١٣,٥٢٨٧}{٥} = \boxed{٢,٧٠٥٧}$$

$$\bar{س} = \frac{مجـ \, س}{ن} = \frac{١٠,٤٥٣}{٥} = \boxed{٢,٠٩٠٦}$$

$$\therefore لو_{هـ} \hat{أ} = \bar{ص} - \hat{ب} \, \bar{س}$$

$$= ٢,٧٠٥٧ - ١,٣٤ \times ٢,٠٩٠٦$$

$$= ٢,٧٠٥٧ - ٢,٨٠١٤٠٤$$

$$= \boxed{-٠,٠٩٥٧}$$

(٣) يتم التعويض عن قيمة $\hat{ب}$ ، $لو_{هـ} \hat{أ}$ فى نموذج الدالة الأسية بعد تحويلها إلى الصورة اللوغاريتمية :

$$لو_{هـ} \hat{ص} = لو_{هـ} \hat{أ} + \hat{ب} \, لو_{هـ} س$$

لوهـ صْ = ـ ٠,٠٩٥٧ + ١,٣٤ لوهـ س

اختبار جوهرية نموذج الدالة الاسية :

خطوات الاختبار :

(١) التغير الكلى (م ٠ م ٠ ك) = مجـ (صب ـ صَب)٢

= مجـ ص٢ب ـ (مجـ ص,)٢ / ن

= ٣٧,٣٣١٢ ـ (١٣,٥٢٨٧)٢ / ٥

= ٣٧,٣٣١٢ ـ ٣٦,٦٠٥١٤٥

= **٠,٧٢٦١**

(٢) التغير المفسر (م ٠ م ٠ ر) = بْ مجـ (سب ـ سَب) (صب ـ صَب)

= بْ (مجـ سب صب ـ (مجـ سب × مجـ صب) / ن)

البسط الخاص لقانون بْ

= ١,٣٤ × ٠,٥٤٠٥

= **٠,٧٢٤٣**

(٣) التغير العشوائى (البواقى) (م ٠ م٠ ى) = م ٠ م ٠ ك – م ٠ م ٠ ر

= ٠,٧٢٦١ – ٠,٧٢٤٣

= $\boxed{٠,٠٠١٨}$

(٤) يتم عمل جدول تحليل التباين الآتى :

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	ف المحسوبة
المفسر	٠,٧٢٤٣	١	$\frac{٠,٧٢٤٣}{١}$ = $\boxed{٠,٧٢٤٣}$	$\frac{٠,٧٢٤٣}{٠,٠٠٠٦}$ ÷ = $\boxed{١٢٠٦}$
العشوائى	٠,٠٠١٨	ن – ٢ ٥ – ٢ ٣	$\frac{٠,٠٠١٨}{٣}$ = $\boxed{٠,٠٠٠٦}$	
الكلى	٠,٧٣٦١	تباين التقدير (σ^2)		

(٥) يتم مقارنة قيمة ف المحسوبة بقيمة ف الجدولية التى بدرجات حرية (١ ، ٣)

ف المحسوبة	ف الجدولية التى بدرجات حرية (١ ، ٣)
١٢٠٦	١٠,١٣

∴ النموذج معنوى أى أن المتغير المستقل (س) له تأثير جوهرى على المتغير التابع (ص).

(٢) **التنبؤ بحجم الإنتاج (ص) إذا علمت أن عدد العمال (س) = ١٥ :**

أولا : التنبؤ بنقطة :

في هذه الحالة يتم التعويض عن قيمة س المعطاه فى التمرين فى نموذج الدالة الأسية بعد تحويلها إلى اصورة اللوغاريتمية فنحصل على قيمة لو$_{هـ}$ $\hat{\text{ص}}$.

لو$_{هـ}$ $\hat{\text{ص}}$ = – ٠,٠٩٥٧ + ١,٣٤ لو$_{هـ}$ س

= – ٠,٠٩٥٧ + ١,٣٤ لو$_{هـ}$ ١٥

= – ٠,٠٩٥٧ + ١,٣٤ × ٢,٧٠٨١

= $\boxed{٣,٥٣٣}$ ⟵ $\hat{\text{ص}}_{.}$

ثانيا : التنبؤ بفترة ثقة ٩٥٪ :

القانون المستخدم :

$$\boxed{\hat{\text{ص}}_{.} \pm \text{ت} \times \sigma_{\hat{\text{ص}}_{.}}}$$

حيث :

$\hat{\text{ص}}_{.}$ = التنبؤ بنقطة = لو$_{هـ}$ $\hat{\text{ص}}$ = ٣,٥٣٣

ت = قيمة ت الجدولية التى بدرجات حرية (ن − ٢) أى بدرجات حرية (٣) = ٣,١٨٢

$\sigma_{\hat{ص}}$ = الخطأ المعيارى للتنبؤ ويتم حسابه كالآتى :

$$\sigma_{\hat{ص}} = \sigma \sqrt{1 + \frac{1}{ن} + \frac{(س_ف - \bar{س})^2}{مجـ (س - \bar{س})^2}}$$

حيـث :

$\sigma = \sqrt{تباين\ التقدير} = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{٠,٠٠٠٦} = ٠,٠٢٤٥$

ن = حجم العينـة = ٥

$س_ف$ = قيمة س الفعلية المعطاه فى التمرين = ١٥

$س_ب$ = لو$_هـ$ $س_ف$ = لو$_هـ$ ١٥ = ٢,٧٠٨١

$$\bar{س} = \frac{مجـ\ س}{ن} = \frac{١٠,٤٥٣}{٥} = ٢,٠٩٠٦$$

$مجـ (س - \bar{س})^2$ = المقام الخاص لقانون $\hat{ب}$ = ٠,٤٠٣٣

$$\therefore \sigma_{\hat{\text{ص}}} = \sigma \sqrt{1 + \frac{1}{\text{ن}} + \frac{(\text{س}_{\text{ف}} - \bar{\text{س}})^2}{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^2}}$$

$$= ٠,٠٢٤٥ \sqrt{١ + \frac{١}{٥} + \frac{(٢,٧٠٨١ - ٢,٠٩٠٦)^٢}{٠,٤٠٣٣}}$$

$$= ٠,٠٢٤٥ \sqrt{١ + ٠,٢ + \frac{٠,٣٨١٣٠٦٢}{٠,٤٠٣٣}}$$

$$= ٠,٠٢٤٥ \sqrt{٢,١٤٥٤٦٥٥}$$

$$\sigma_{\hat{\text{ص}}} = ٠,٠٢٤٥ \times ١,٤٦٤٧٤٠٨ =$$

$$٠,٠٣٥٩$$

$$\therefore \hat{\text{ص}} \pm \text{ت} \times \sigma_{\hat{\text{ص}}}$$

$$٣,٥٣٣ \pm ٣,١٨٢ \times ٠,٠٣٥٩$$

$$٣,٥٣٣ \pm ٠,١١٤٢٣٣٨$$

∴ الحد الأدنى = ٣,٥٣٣ − ٠,١١٤٢٣٣٨ = $\boxed{٣,٤١٨٧٦٦٢}$

الحد الأعلى = ٣,٥٣٣ + ٠,١١٤٢٣٣٨ = $\boxed{٣,٦٤٧٢٣٣٨}$

تمرين (٢)

سحبت عينة عشوائية من ٥ عمال فى أحد المصانع لتقدير دالة الإنتاج الأسية فتوافرت لديك البيانات الآتية :

$$(\bar{\text{س}}\,\text{س}) = \begin{pmatrix} ١٠,٤٥٣ & ٥ \\ ٢٢,٢٥٦٣ & ١٠,٤٥٣ \end{pmatrix}$$

$$(\bar{\text{س}}\,\text{ص}) = \begin{pmatrix} ١٣,٥٢٨٧ \\ ٢٨,٨٢٣٦ \end{pmatrix}$$

$$\text{مجـ ص}^{٢} = ٣٧,٣٣١٢$$

حيـث أن :

س : عدد العمال ص : عدد الوحدات المنتجة (حجم الإنتاج)

$س^* = لو_{هـ} س$ $ص^* = لو_{هـ} ص$

المطلوب :

(١) تقدير نموذج دالة الإنتاج الأسية ثم إختبر جوهرية هذا النموذج المقدر.

(٢) التنبؤ بحجم الإنتاج إذا علمت أن عدد العمال = ١٥ وذلك بفترة ثقة ٩٥٪.

(٣) معرفة إلى أى حد يعتبر عدد العمال مسئولاً عن التغير فى حجم الإنتاج.

(٤) إيجاد المرونة ثم فسر معناها.

(٥) إختبار القدرة التنبؤية للنموذج إذا علمت أن كمية الإنتاج الفعلية = ٣٦

إذا علمت أن :

ف الجدولية بدرجات حرية (١ ، ٣) = ١٠,١٣

ف الجدولية بدرجات حرية (٢ ، ٥) = ٣,٢٤

ت الجدولية بدرجات حرية (٣) = ٣,١٨٢

ت الجدولية بدرجات حرية (٥) = ٢,١٦

الحـــــل

(١) تقدير النموذج الأسى باستخدام طريقة المصفوفات :

الخطوات :

(١) يتم تكوين مصفوفة المعاملات $(\bar{\text{س}}\,\text{س}_\text{ب})$ ⟵ معطاه فى التمرين

$$(\bar{\text{س}}\,\text{س}_\text{ب}) = \begin{pmatrix} \text{ن} & \text{مجـ س}_\text{ب} \\ \text{مجـ س}_\text{ب} & \text{مجـ س}_\text{ب}^{\text{٢}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{٥} & \text{١٠,٤٥٣} \\ \text{١٠,٤٥٣} & \text{٢٢,٢٥٦٣} \end{pmatrix}$$

وهذا يعنى أن :

$\text{ن} = \text{٥}$ $\qquad$ $\text{مجـ س}_\text{ب} = \text{١٠,٤٥٣}$ $\qquad$ $\text{مجـ س}_\text{ب}^{\text{٢}} = \text{٢٢,٢٥٦٣}$

(٢) يتم إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات وذلك بإتباع الخطوات الآتية :

(أ) يتم إيجاد المحدد العام للمصفوفة كالآتى :

$$\begin{vmatrix} \text{٥} & \text{١٠,٤٥٣} \\ \text{١٠,٤٥٣} & \text{٢٢,٢٥٦٣} \end{vmatrix}$$

القطر الفرعى $\qquad\qquad$ القطر الرئيسى

المحدد العام = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى − حاصل ضرب عناصر القطر الفرعى

= ٥ × ٢٢,٢٥٦٣ − ١٠,٤٥٣ × ١٠,٤٥٣

= ١١١,٢٨١٥ − ١٠٩,٢٦٥٢١

= $\boxed{٢,٠١٦٣}$

(ب) <u>يتم إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات باستخدام القانون الآتي</u> :

معكوس مصفوفة المعاملات $(\text{سَ س})^{-1}$ = $\frac{1}{\text{المحدد العام}}$ $\begin{pmatrix} \text{مجـ س} & \text{ن} \\ \text{مجـ س}^{2} & \text{مجـ س} \end{pmatrix}$

يتم تغيير إشارة عناصر القطر الفرعى

يتم إبدال عناصر القطر الرئيسى مكان بعضهما

$(\text{سَ س})^{-1}$ = $\frac{1}{٢,٠١٦٣}$ $\begin{pmatrix} ١٠,٤٥٣- & ٢٢,٢٥٦٣ \\ ٥ & ١٠,٤٥٣- \end{pmatrix}$

(٣) يتم إيجاد قيمة لو$_{\text{هـ}}$ $\hat{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ كالآتى :

$$\begin{pmatrix} \text{مصفوفة الثوابت} \\ (\text{سَ ص}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{معكوس مصفوفة المعاملات} \\ (\text{سَ س})^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{لو}_{\text{هـ}}\ \hat{\text{أ}} \\ \hat{\text{ب}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{(مجـ ص)} \\ \text{١٣,٥٢٨٧} \\ \text{(مجـ س ص)} \\ \text{٢٨,٨٢٣٦} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{١٠,٤٥٣ـ} & \text{٢٢,٢٥٦٣} \\ \text{٥} & \text{١٠,٤٥٣ـ} \end{pmatrix} \frac{\text{١}}{\text{٢,٠١٦٣}} =$$

$$\begin{pmatrix} \text{٢٨,٨٢٣٦} \times \text{١٠,٤٥٣} - \text{١٣,٥٢٨٧} \times \text{٢٢,٢٥٦٣} \\ \text{٢٨,٨٢٣٦} \times \text{٥} + \text{١٣,٥٢٨٧} \times \text{١٠,٤٥٣ـ} \end{pmatrix} \frac{\text{١}}{\text{٢,٠١٦٣}} =$$

$$\begin{pmatrix} \text{٣٠١,٢٩٣٠٩} & - & \text{٣٠١,٠٩٨٨١} \\ \text{١٤٤,١١٨} & + & \text{١٤١,٤١٥٥ـ} \end{pmatrix} \frac{\text{١}}{\text{٢,٠١٦٣}} =$$

$$\begin{pmatrix} \text{٠,١٩٤٢٨ـ} \\ \text{٢,٧٠٢٥ـ} \end{pmatrix} \frac{\text{١}}{\text{٢,٠١٦٣}} =$$

$$\begin{pmatrix} \text{٠,٠٩٦٤ـ} \\ \text{١,٣٤٠٣} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{لو}_{\text{هـ}}\ \hat{\text{أ}} \\ \hat{\text{ب}} \end{pmatrix}$$

∴ $لو_{هـ} \hat{أ} = -٠,٠٩٦٤$

$\hat{ب} = ١,٣٤٠٣$

(٤) يتم التعويض عن قيمة $لو_{هـ} \hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ في نموذج الدالة الأسية بعد تحويلها إلى الصورة اللوغاريتمية :

$$لو_{هـ} \hat{ص} = لو_{هـ} \hat{أ} + \hat{ب} \; لو_{هـ} س$$

$$\boxed{لو_{هـ} \hat{ص} = -٠,٠٩٦٤ + ١,٣٤٠٣ \; لو_{هـ} س}$$

اختبار جوهرية النمـــوذج :

الخطـــوات :

(١) التغير الكلى (م ٠ م ٠ ك) $= مجـ (ص_{و} - \bar{ص})^٢$

$$= مجـ ص_{و}^٢ - \frac{(مجـ ص_{و})^٢}{ن}$$

$$= ٣٧,٣٣١٢ - \frac{(١٣,٥٢٨٧)^٢}{٥}$$

$$= ٣٧,٣٣١٢ - ٣٦,٦٠٥١٤٥$$

$$= \boxed{٠,٧٢٦١}$$

(٢) التغير المفسر (م • م • ر) = ب̂ مجـ (سب ـ س̄ب) (صب ـ ص̄ب)

$$= \hat{ب} \left(مجـ\ سب\ صب - \frac{مجـ\ سب \times مجـ\ صب}{ن} \right)$$

$$= ١,٣٤٠٣ \left(٢٨,٨٢٣٦ - \frac{١٣,٥٢٨٧ \times ١٠,٤٥٣}{٥} \right)$$

$$= ١,٣٤٠٣ \left(٢٨,٨٢٣٦ - ٢٨,٢٨٣١ \right)$$

$$= ١,٣٤٠٣ \times ٠,٥٤٠٤٩٩٧$$

$$= \boxed{٠,٧٢٤٣}$$

(٣) التغير العشوائي (م • م • ى) = م • م • ك ـ م • م • ر

$$= ٠,٧٢٦١ - ٠,٧٢٤٣$$

$$= \boxed{٠,٠٠١٨}$$

يتم عمل جدول تحليل التباين الآتى :

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	ف المحسوبة
المفسر	٠,٧٢٤٣	١	$\frac{٠,٧٢٤٣}{١} = \boxed{٠,٧٢٤٣}$	$\frac{٠,٧٢٤٣}{٠,٠٠٠٦} \div$ $= \boxed{١٢٠٦}$
العشوائى	٠,٠٠١٨	ن ـ ٢ ٥ ـ ٢ ٣	$\frac{٠,٠٠١٨}{٣} = \boxed{٠,٠٠٠٦}$	
الكلى	٠,٧٢٦١	تباين التقدير ($\sigma^{٢}$)		

(٥) يتم مقارنة قيمة ف المحسوبة بقيمة ف الجدولية التى بدرجات حرية (١ ، ٣)

ف المحسوبة	ف الجدولية التى بدرجات حرية (١ ، ٣)
١٢٠٦	١٠,١٣

∴ النموذج معنوى ويصلح للتنبؤ.

(٢) <u>التنبؤ بحجم الإنتاج (ص) إذا علمت أن عدد العمال (س) = ١٥</u> :

<u>أولا</u> : <u>التنبؤ بنقطة</u> :

$$لو_{هـ} \hat{ص} = -٠,٠٩٦٤ + ١,٣٤٠٣ \; لو_{هـ} س$$

$$= -٠,٠٩٦٤ + ١,٣٤٠٣ \; لو_{هـ} ١٥$$

$$= -٠,٠٩٦٤ + ١,٣٤٠٣ \times ٢,٧٠٨١$$

$$لو_{هـ} \hat{ص} = \boxed{٣,٥٣٣} \longrightarrow \hat{ص}_{\cdot}$$

<u>ثانيا</u> : <u>التنبؤ بفترة ثقة ٩٥٪</u> :

القانون المستخدم :

$$\boxed{\hat{ص}_{\cdot} \pm ت \times \sigma_{\hat{ص}_{\cdot}}}$$

حيـث :

$\hat{ص}_و$ = التنبؤ بنقطة = لو$_هـ$ $\hat{ص}$ = ٣,٥٣٣

ت = قيمة ت الجدولية التى بدرجات حرية (ن – ٢) أى بدرجات حرية (٣) = ٣,١٨٢

$\sigma_{\hat{ص}_و}$ = الخطأ المعيارى للتنبؤ ويتم حسابه كالآتى :

$$\sigma_{\hat{ص}_و} = \sigma \sqrt{1 + \frac{1}{ن} + \frac{(س_ف - \bar{س}_و)^2}{مجـ (س_و - \bar{س}_و)^2}}$$

حيـث :

$$\sigma = \sqrt{\text{تباين التقدير}} = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{٠,٠٠٠٦} = ٠,٠٢٤٥$$

ن = حجم العينـة = ٥

$س_ف$ = قيمة س الفعلية المعطاه فى التمرين = ١٥

$س_ف$ = لو$_هـ$ $س_ف$ = لو$_هـ$ ١٥ = ٢,٧٠٨١

$$\bar{س}_و = \frac{مجـ س_و}{ن} = \frac{١٠,٤٥٣}{٥} = ٢,٠٩٠٦$$

$مجـ (س_و - \bar{س}_و)^2$ = المقام الخاص لقانون $\hat{ب}$ = ٠,٤٠٣٣

$$\therefore \sigma_{\hat{\text{ص}}} = \sigma \sqrt{\text{١} + \frac{\text{١}}{\text{ن}} + \frac{(\text{س}_{\text{ف}} - \bar{\text{س}})^{\text{٢}}}{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^{\text{٢}}}}$$

$$= \text{٠,٠٢٤٥} \sqrt{\text{١} + \frac{\text{١}}{\text{٥}} + \frac{(\text{٢,٧٠٨١} - \text{٢,٠٩٠٦})^{\text{٢}}}{\text{٠,٤٠٣٣}}}$$

$$= \text{٠,٠٢٤٥} \sqrt{\text{١} + \text{٠,٢} + \frac{\text{٠,٣٨١٣٠٦٢}}{\text{٠,٤٠٣٣}}}$$

$$= \text{٠,٠٢٤٥} \sqrt{\text{٢,١٤٥٤٦٥٥}}$$

$$\sigma_{\hat{\text{ص}}} = \text{٠,٠٢٤٥} \times \boxed{\text{١,٤٦}}\text{٤٧٤٠٨} \boxed{=}$$

$$\text{٠,٠٣٥٩}$$

$$\therefore \hat{\text{ص}} \pm \text{ت} \times \sigma_{\hat{\text{ص}}}$$

$$\text{٣,٥٣٣} \pm \text{٣,١٨٢} \times \text{٠,٠٣٥٩}$$

٠,١١٤٢٣٣٨ ± ٣,٥٣٣

∴ الحد الأدنى = ٣,٥٣٣ − ٠,١١٤٢٣٣٨ = $\boxed{٣,٤١٨٧٦٦٢}$

الحد الأعلى = ٣,٥٣٣ + ٠,١١٤٢٣٣٨ = $\boxed{٣,٦٤٧٢٣٣٨}$

(٣) إلى أى حد يعتبر عدد العمال (س) مسئولا عن التغير فى حجم الإنتاج (ص) :

المقصود بذلك هو إيجاد معامل التحديد :

$$\text{معامل التحديد} = \frac{\text{التغير المفسر (م. م. ر)}}{\text{التغير الكلى (م. م. ك)}}$$

$$= \frac{٠,٧٢٤٣}{٠,٧٢٦١} = \boxed{٠,٩٩}$$

وهذا يعنى أن عدد العمال (س) يعتبر مسئولاً عن ٩٩٪ من التغير الذى يحدث فى حجم الإنتاج (ص).

(٤) إيجاد المرونة :

$$\boxed{\text{المرونة فى حالة النموذج الأسى} = \hat{ب}}$$

$$\text{المرونة} = \hat{ب} = \boxed{١,٣٤٠٣}$$

وهذا يعنى أنه إذا زاد عدد العمال (س) بمقدار ١٪ سوف يؤدى إلى زيادة فى الكمية المنتجة (ص) بمقدار ١,٣٤٠٣٪ .

(٥) اختبار القدرة التنبؤية للنموذج إذا علمت أن كمية الإنتاج الفعلية (ص) = ٣٦ :

القانون المستخدم :

$$\text{ت المحسوبة} = \left| \frac{\text{ص}_{\cdot} - \hat{\text{ص}}_{\cdot}}{\sigma_{\hat{\text{ص}}_{\cdot}}} \right|$$

حيث :

$$\text{ص}_{\cdot} = \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\ ٣٦ = ٣,٥٨٣٥$$

$$\hat{\text{ص}}_{\cdot} = \text{لو}_{\text{هـ}}\ \hat{\text{ص}} = ٣,٥٢٣$$

$$\sigma_{\hat{\text{ص}}_{\cdot}} = ٠,٠٣٥٩$$

$$\text{ت المحسوبة} = \left| \frac{\text{ص}_{\cdot} - \hat{\text{ص}}_{\cdot}}{\sigma_{\hat{\text{ص}}_{\cdot}}} \right|$$

$$= \left| \frac{٣,٥٨٣٥ - ٣,٥٢٣}{٠,٠٣٥٩} \right| = \boxed{١,٤}$$

يتم مقارنة قيمة ت المحسوبة بقيمة ت الجدولية التى بدرجات حرية (ن ـ ٢) أى بدرجات حرية (٣).

ت المحسوبة		ت الجدولية التى بدرجات حرية (٣)
١,٤	$<$	٣,١٨٢

∴ النموذج له قدرة تنبؤية عالية.

ثالثا : نموذج الدالة العكسية :

<u>معادلة نموذج الدالة العكسية</u> :

$$\boxed{\hat{\text{ص}} \quad = \quad \hat{\text{أ}} \quad + \quad \hat{\text{ب}} \quad \text{س}^{\bullet}}$$

<u>حيـــث</u> :

$$\text{س}^{\bullet} = \frac{1}{\text{س}}$$

تقدير نمـــوذج الدالة العكســية :

<u>الخطوات</u>:

(١) <u>يتم إيجاد قيمة $\hat{\text{ب}}$ كالآتى</u> :

$$\boxed{\hat{\text{ب}} = \frac{\text{مجـ } (\text{س} - \bar{\text{س}})\,(\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\text{مجـ } (\text{س} - \bar{\text{س}})^{2}} = \frac{\text{مجـ س ص} - \dfrac{\text{مجـ س}^{\bullet} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن}}}{\text{مجـ س}^{2} - \dfrac{(\text{مجـ س})^{2}}{\text{ن}}}}$$

حيــث :

$$\text{س}^{\bullet} = \frac{1}{\text{س}}$$

(٢) يتم إيجاد قيمة $\hat{\text{أ}}$ كالآتى :

$$\boxed{\hat{\text{أ}} = \bar{\text{ص}} - \hat{\text{ب}}\ \bar{\text{س}}^{\bullet}}$$

حيث :

$$\bar{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}$$

$$\bar{\text{س}}^{\bullet} = \frac{\text{مجـ س}^{\bullet}}{\text{ن}}$$

(٣) يتم التعويض عن قيم $\hat{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ فى معادلة نموذج الدالة العكسية الآتية :

$$\boxed{\hat{\text{ص}} = \hat{\text{أ}} + \hat{\text{ب}}\ \text{س}^{\bullet}}$$

ملاحظـــة هامـــة :

يلاحظ أن الخطوات السابقة هى نفس خطوات تقدير النموذج الخطى البسيط باستخدام الطريقة المختصرة مع استبدال الرمز س بالرمز س•.

حيـــث :

$$س^{\bullet} = \frac{1}{س}$$

- **اختبار جوهرية نموذج الدالة العكسية** :

خطوات هذا الاختبار :

خطوات هذا الاختبار هى نفس خطوات اختبار جوهرية النموذج الخطى البسيط مع استبدال الرمز س بالرمز س•

حيـــث :

$$س^{\bullet} = \frac{1}{س}$$

* **استخدام نموذج الدالة العكسية فى التنبؤ :**

أولا - التنبؤ بنقطة :

فى هذه الحالة يتم التعويض عن قيمة س المعطاة فى التمرين فى معادلة نموذج الدالة العكسية فنحصل على قيمة $\hat{ص}$.

ثانيا - التنبؤ بفترة ثقة :

القانون المستخدم :

$$\boxed{\hat{ص} \pm ت \times \sigma_{\hat{ص}}}$$

حيث:

$\hat{ص}$: قيمة التنبؤ بنقطة

ت : قيمة ت الجدولية التى بدرجات حرية (ن – ٢)

$\sigma_{\hat{ص}}$: الخطأ المعيارى للتبنؤ ويتم حسابه كالآتى :

$$\boxed{\sigma_{\hat{ص}} = \sigma \sqrt{1 + \frac{1}{ن} + \frac{(س^{\bullet}_{ف} - \bar{س}^{\bullet})^{2}}{مجـ(س^{\bullet} - \bar{س}^{\bullet})^{2}}}}$$

حيث :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^{2}}$$

ن = حجم العينة

$س_{ف}$ = قيمة س الفعلية المعطاه فى التمرين

$$س^{\bullet}_{ف} = \frac{1}{س_{ف}}$$

$$\text{سَ}^{\bullet} = \frac{\text{مجـ س}^{\bullet}}{\text{ن}}$$

$$\text{مجـ}(\text{س}^{\bullet} - \text{سَ}^{\bullet})^{2} = \text{المقام الخاص لقانون } \hat{\text{ب}}$$

- **<u>تحديد القوة التفسيرية لنموذج الالة العكسية</u>** :

$$\text{معامل التحديد } (\text{ر}^{2}) = \frac{\text{التغير المفسر (م . م . ر)}}{\text{التغير الكلى (م . م . ك)}}$$

تمرين *

البيانات الآتية تمثل بيانات عن معدل البطالة وكذلك معدل التغير فى الأجور لعينة من ٦ فترات زمنية.

معدل البطالة ٪	٢	٢,٢	٢,٥	٣	٣,٢	٣,٦
معدل التغير فى الأجور ٪	١٦	١٦	١٢	١٠	٨	٦

<u>المطلوب</u> :

(١) تقدير نموذج الدالة العكسية الذى يوضح العلاقة بين معدل البطالة ومعدل التغير فى الأجور ثم اختبر جوهريته.

(*) د/ مصطفى جلال وآخرون ، <u>الإحصاء المتقدم</u> ، بدون ناشر ، ٢٠٠٦ ، ص ١٦٦.

(٢) إيجاد المعدل الطبيعى للبطالة مع تفسير معناه.

(٣) التنبؤ بمعدل التغير فى الأجور إذا كان معدل البطالة = ١,٥٪.

وذلك :

أولاً - التنبؤ بنقطة

ثانياً - التنبؤ بفترة ثقة ٩٥٪.

(٤) إلى أى حد يعتبر معدل البطالة مسئولا عن التغير فى معدل الأجور.

قيم جدوليـة :

ف بدرجات حرية (١ ، ٤) = ٧,٧١

ت بدرجات حرية (٤) = ٢,٧٧٦

الحـــل

$\frac{١}{س}$

معدل البطالة (٪) س	معدل التغير فى الأجور (٪) ص	س•	س• ص	س•٢	ص٢
٢	١٦	$\frac{١}{٢}$ = ٠,٥	٨	٠,٢٥	٢٥٦
٢,٢	١٦	$\frac{١}{٢,٢}$ = ٠,٤٥٤٥	٧,٢٧٢	٠,٢٠٦٦	٢٥٦
٢,٥	١٢	$\frac{١}{٢,٥}$ = ٠,٤	٤,٨	٠,١٦	١٤٤
٣	١٠	$\frac{١}{٣}$ = ٠,٣٣٣٣	٣,٣٣٣	٠,١١١١	١٠٠
٣,٢	٨	$\frac{١}{٣,٢}$ = ٠,٣١٢٥	٢,٥	٠,٠٩٧٦	٦٤
٣,٦	٦	$\frac{١}{٣,٦}$ = ٠,٢٧٧٨	١,٦٦٦٨	٠,٠٧٧٢	٣٦
	٦٨	٢,٢٧٨١	٢٧,٥٧١٨	٠,٩٠٢٥	٨٥٦

(١) تقدير نموذج الدالة العكسية :

الخطوات :

(١) يتم إيجاد قيمة $\hat{ب}$ كالآتي :

$$\hat{ب} = \frac{\text{مجـ س}^{\bullet}\text{ص} - \frac{\text{مجـ س}^{\bullet} \times \text{مجـ ص}}{ن}}{\text{مجـ س}^{\bullet 2} - \frac{(\text{مجـ س}^{\bullet})^{2}}{ن}}$$

$$= \frac{٢٧,٥٧١٨ - \frac{٢,٢٧٨١ \times ٦٨}{٦}}{٠,٩٠٢٥ - \frac{(٢,٢٧٨١)^{2}}{٦}}$$

$$= \frac{٢٧,٥٧١٨ - ٢٥,٨١٨٤٦٧}{٠,٩٠٢٥ - ٠,٨٦٤٩٥٦٦}$$

$$= \frac{١,٧٥٣٣}{٠,٠٣٧٥}$$

$$= \boxed{٤٦,٧}$$

(٢) يتم إيجاد قيمة $\hat{أ}$ كالآتي :

$$\hat{أ} = \bar{ص} - \hat{ب}\ \bar{س}^{\bullet}$$

حيث :

$$\bar{ص} = \frac{مجـ\ ص}{ن} = \frac{٦٨}{٦} = \boxed{١١,٣٣٣}$$

$$\bar{س}^{\bullet} = \frac{مجـ\ س^{\bullet}}{ن} = \frac{٢,٢٧٨١}{٦} = \boxed{٠,٣٧٩}$$

$$\therefore\ \hat{أ} = \bar{ص} - \hat{ب}\ \bar{س}^{\bullet}$$

$$= ١١,٣٣٣ - ٤٦,٧ \times ٠,٣٧٩$$

$$= ١١,٣٣٣ - ١٧,٦٩٩٣$$

$$= \boxed{-\ ٦,٣٦٦٣}$$

(٣) يتم التعويض عن قيمة $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ فى معادلة نموذج الدالة العكسية الآتية :

$$\hat{ص} = \hat{أ} + \hat{ب}\ س^{\bullet}$$

$$\boxed{\hat{ص} = -\ ٦,٣٦٦٣ + ٤٦,٧\ س^{\bullet}}$$

اختبار جوهرية نموذج الدالة العكسية :

خطوات الاختبار :

(١) التغير الكلى (م • م • ك) = مجـ (ص - صَ)٢

$$= \text{مجـ ص}^2 - \frac{(\text{مجـ ص})^2}{\text{ن}}$$

$$= ٨٥٦ - \frac{(٦٨)^2}{٦}$$

$$= ٨٥٦ - ٧٧٠,٦٦٧$$

$$= \boxed{٨٢,٣٣٣}$$

(٢) التغير المفسر (م • م • ر) = $\hat{\text{ب}}$ × البسط الخاص لقانون $\hat{\text{ب}}$

$$= ٤٦,٧ \times ١,٧٥٣٣$$

$$= \boxed{٨١,٨٨}$$

(٣) التغير العشوائي(البواقى) (م • م • ى) = م • م • ك - م • م • ر

$$= ٨٥,٣٣٣ - ٨١,٨٨$$

$$= \boxed{٣,٤٥٣}$$

(٤) يتم عمل جدول تحليل التباين الآتى :

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	ف المحسوبة
المفسَر	٨١,٨٨	١	$\frac{٨١,٨٨}{١}$ = $\boxed{٨١,٨٨}$	$\frac{٨١,٨٨}{٠,٨٦٣}$ ÷ = $\boxed{٩٤,٨}$
العشوائى	٣,٤٥٣	ن ـ ٢ ٦ ـ ٢ ٤	$\frac{٣,٤٥٣}{٤}$ = $\boxed{٠,٨٦٣}$	
الكلى	٨٥,٣٣٣	تباين التقدير $(\sigma^{٢})$		

(٥) يتم مقارنة قيمة ف المحسوبة بقيمة ف الجدولية التى بدرجات حرية (١ ، ٤)

ف المحسوبة	ف الجدولية
٩٤,٨	٧,٧١

∴ النموذج جوهرى ويصلح للتنبؤ.

(٢) **<u>إيجاد المعدل الطبيعى للبطالة مع تفسير معناه</u>** :

$$\text{المعدل الطبيعى للبطالة} = \frac{-\hat{\text{ب}}}{\hat{\text{أ}}}$$

$$= \frac{-٤٦,٧}{-٦,٣٦٦٣} = ٧,٣٣٪$$

وهذا يعنى أنه إذا كان معدل البطالة ٧,٣٣٪ فإن معدل التغير فى الأجور يكون صفراً.

٣) **التنبؤ بمعدل التغير فى الأجور (ص) إذا كان معدل البطالة (س) = ١,٥٪ :**

أولا : التنبؤ بنقطة :

∵ س = ١,٥

$$\therefore \text{س}^{\bullet} = \frac{١}{\text{س}} = \frac{١}{١,٥} = \boxed{٠,٦٦٦٧}$$

يتم التعويض عن قيمة س• فى معادلة نموذج الدالة العكسية فنحصل على قيمة ص̂.

$$\hat{\text{ص}} = -٦,٣٦٦٣ + ٤٦,٧ \quad \text{س}$$

$$\hat{\text{ص}} = -٦,٣٦٦٣ + ٤٦,٧ \times ٠,٦٦٦٧$$

$$\hat{\text{ص}} = -٦,٣٦٦٣ + ٣١,١٣٤٨٩ = \boxed{٢٤,٧٦٨}$$

ثانيا : التنبؤ بفترة ثقة ٩٥٪ :

القانون المستخدم :

$$\boxed{\hat{\text{ص}} \pm \text{ت} \times \sigma_{\hat{\text{ص}}}}$$

حيـث :

$\hat{ص}$: التنبؤ بنقطة = ٢٤,٧٦٨

ت : قيمة ت الجدولية التى بدرجات حرية (ن − ٢) أى بدرجات حرية (٤) = ٢,٧٧٦

$\sigma_{\hat{ص}}$: الخطأ المعيارى للتنبؤ ويتم حسابه كالآتى :

$$\sigma_{\hat{ص}} = \sigma \sqrt{1 + \frac{1}{ن} + \frac{(س^{\bullet}_{ف} - \bar{س}^{\bullet})^{2}}{مجـ (س^{\bullet} - \bar{س}^{\bullet})^{2}}}$$

حيـث :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^{2}} = \sqrt{٠,٨٦٣} = ٠,٩٣$$

ن = حجم العينـة = ٦

$س_{ف}$ = قيمة س الفعلية المعطاه فى التمرين = ١,٥

$$س^{\bullet}_{ف} = \frac{1}{س_{ف}} = \frac{1}{١,٥} = ٠,٦٦٦٧$$

$$\bar{س}^{\bullet} = \frac{مجـ\ س^{\bullet}}{ن} = \frac{٢,٢٧٨١}{٦} = ٠,٣٧٩$$

مجـ $(س^{\bullet} - \bar{س}^{\bullet})^{2}$ = المقام الخاص لقانون $\hat{ب}$ = ٠,٠٣٧٥

$$\therefore \hat{\sigma}_{ص} = \sigma \sqrt{\text{١} + \frac{\text{١}}{ن} + \frac{(س^{\circ}_{ف} - \bar{س}^{\circ})^{\text{٢}}}{مجـ(س^{\circ} - \bar{س}^{\circ})^{\text{٢}}}}$$

$$= \text{٠,٩٣} \sqrt{\text{١} + \frac{\text{١}}{\text{٦}} + \frac{(\text{٠,٦٦٦٧} - \text{٠,٣٧٩})^{\text{٢}}}{\text{٠,٠٣٧٥}}}$$

$$= \text{٠,٩٣} \sqrt{\text{١} + \text{٠,١٦٦٧} + \frac{\text{٠,٠٨٢٧٧١٢}}{\text{٠,٠٣٧٥}}}$$

$$= \text{٠,٩٣} \sqrt{\text{١} + \text{٠,١٦٦٧} + \text{٢,٢٠٧٢٣٤٤}}$$

$$\hat{\sigma}_{ص} = \text{٠,٩٣} \times \text{١,٨٣٦٨٢٧٣} = \boxed{\text{١,٧٠٨٢}}$$

$$\therefore \hat{ص} \pm ت \times \hat{\sigma}_{ص}$$

$$\text{٢٤,٧٦٨} \pm \text{٢,٧٧٦} \times \text{١,٧٠٨٢}$$

$$\text{٢٤,٧٦٨} \pm \text{٤,٧٤١٩}$$

∴ الحد الأدنى = $\text{٢٤,٧٦٨} - \text{٤,٧٤١٩} = \boxed{\text{٢٠,٠٢٦١}}$

الحد الأعلى = $\text{٢٤,٧٦٨} + \text{٤,٧٤١٩} = \boxed{\text{٢٩,٥٠٩٩}}$

(٤) إلى أى حد يقتبر معدل البطالة (س) مسئولاً عن التغير فى معدل الأجور (ص) :

ويقصد بذلك هو إيجاد معامل التحديد :

$$\text{معامل التحديد } (ر^{٢}) = \frac{\text{التغير المفسر (م • م • ر)}}{\text{التغير الكلــى (م • م • ك)}}$$

$$= \frac{٨١,٨٨}{٨٥,٣٣٣} = \boxed{٠,٩٦}$$

وهذا يعنى أن معدل البطالة (س) مسئول عن ٩٦٪ من التغير فى الأجور.

رابعا : نموذج منحنى جمبرتز :

معادلة نموذ ج منحنى جمبرتز :

$$\boxed{\hat{ص} = أ \times ب^{جـ^{س}}}$$

وبأخذ اللوغاريتم للطرفين :

$$\boxed{لو_{هـ}\ \hat{ص} = لو_{هـ}\ أ + جـ^{س}\ لو_{هـ}\ ب}$$

ولتقدير هذا النموذج يتم إتباع الخطوات الآتية :

(١) يعطى فى التمرين جدول مكون من خانتين الخانة الأولى تمثل السنوات والخانة الثانية تمثل الظاهرة ويرمز لها بالرمز (ص). وفى هذه الحالة يتم تقسيم بيانات هذا الجدول إلى ثلاثة أقسام متساوية.

(٢) يتم إيجاد لوهـ ص لكل قيمة من قيم ص وذلك عن طريق الضغط على زرار Ln فى الآلة الحاسبة.

(٣) يتم إيجاد مجموع لوهـ ص لكل قسم من الأقسام الثلاثة فنحصل على :

مجـ ١ ← مجموع لوهـ ص للقسم الأول

مجـ ٢ ← مجموع لوهـ ص للقسم الثانى

مجـ ٣ ← مجموع لوهـ ص للقسم الثالث

(٤) يتم إيجاد قيمة جـ بإتباع الآتى :

(أ) يتم إيجاد قيمة حـ^ن كالاتى :

$$\boxed{\text{حـ}^{\text{ن}} = \frac{\text{مجـ}_{3} - \text{مجـ}_{2}}{\text{مجـ}_{2} - \text{مجـ}_{1}}}$$

(ب) يتم إيجاد قيمة حـ كالآتى :

$$جـ = \sqrt[ن]{حـ^{\,ن}}$$

حيـث :

ن = عدد القيم فى كل قسم على حدة

(٥) يتم إيجاد قيمة لوهـ ب ، لوهـ أ كالآتى :

$$لوهـ\ ب = (مجـ_٢ - مجـ_١) \times \frac{جـ - ١}{(جـ^{ن} - ١)^{٢}}$$

$$لوهـ\ أ = \frac{١}{ن}\left(مجـ_١ - (لوهـ\ ب \times \frac{جـ^{ن} - ١}{جـ - ١})\right)$$

(٦) يتم التعويض عن قيم جـ ، لوهـ أ ، لوهـ ب فى نموذج منحنى جمبرتز الآتى :

$$لوهـ\ \hat{ص} = لوهـ\ أ + جـ^{س}\ لوهـ\ ب$$

استخدام نموذج منحنى جمبرتز فى التنبؤ :

فى هذه الحالة يتم التعويض عن قيمة س الموجودة فى معادلة نموذج منحنى جمبرتز بالآتى :

(السنة المطلوب التنبؤ بها ـ أول سنة فى السلسلة)

فنحصل على قيمة $لو_هـ \hat{ص}$.

ولإيجاد قيمة $\hat{ص}$ يتم إيجاد العدد المقابل للناتج وذلك عن طريق الضغط على زرار **Shift** ثم الضغط على زرار **Ln** .

تمـــارين متنـــوعة

تمرين (١)

الجدول الآتي يوضح بيانات عن أرباح إحدى المشروعات الصغيرة بالألف جنيه فى الفترة من عام ٢٠٠٠ وحتى عام ٢٠٠٥ :

السنة	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥
الأرباح	٨	١٠	١٥	٢٥	٢٨	٣٠

المطلوب : تقدير نموذج منحنى جمبرتز لأرباح هذا المشروع. ثم استخدم هذا النموذج للتنبؤ بأرباح هذا المشروع عام ٢٠٠٦.

الحــــل

تـقدير نموذج منحنى جمبرتـــــز :

الخطوات :

(١) يلاحظ فى التمرين أنه أعطى جدول مكون من خانتين الخانة الأولى تمثل السنوات والخانة الثانية تمثل المبيعات ويرمز لها بالرمز (ص).
وفى هذه الحالة يتم تقسيم بيانات هذا الجدول إلى ثلاثة أقسام متساوية.

(٢) يتم إيجاد لوهـ ص لكل قيمة من قيم ص وذلك عن طريق الضغط على زرار Ln فى الآلة الحاسبة.

(٣) يتم إيجاد مجموع لوهـ ص لكل قسم من الأقسام الثلاثة فنحصل على مجـ١ ، مجـ٢ ، مجـ٣ .

وفيما يلى توضيح للثلاثة خطوات السابقة فى الجدول الآتى :

	السنة	الأرباح (ص)	لوهـ ص	مجـ لوهـ ص
القسم الأول	٢٠٠٠ ٢٠٠١	٨ ١٠	٢,٠٧٩٤ ٢,٣٠٢٦	← ٤,٣٨٢ ← مجـ١
القسم الثانى	٢٠٠٢ ٢٠٠٣	١٥ ٢٥	٢,٧٠٨١ ٣,٢١٨٩	← ٥,٩٢٧ ← مجـ٢
القسم الثالث	٢٠٠٤ ٢٠٠٥	٢٨ ٣٠	٣,٣٣٢٢ ٣,٤٠١٢	← ٦,٧٣٣٤ ← مجـ٣

ن = عدد القيم داخل كل قسم = ٢

(٤) <u>يتم إيجاد قيمة جـ بإتباع الآتى</u> :

أ <u>يتم إيجاد قيمة حـ^{ن} كالآتى</u> :

$$\text{حـ}^{\text{ن}} = \frac{\text{مجـ}_3 - \text{مجـ}_2}{\text{مجـ}_2 - \text{مجـ}_1}$$

$$\therefore \quad \text{حـ}^{2} = \frac{6{,}7334 - 5{,}927}{5{,}927 - 4{,}382}$$

$$\therefore \quad \text{حـ}^{\text{ن}} = \text{حـ}^{٢} = \frac{٠,٨٠٦٤}{١,٥٤٥} = \boxed{٠,٥٢١٩}$$

(ب) <u>يتم إيجاد قيمة حـ كالآتى</u> :

$$\text{جـ} = \sqrt[\text{ن}]{\text{حـ}^{\text{ن}}}$$

$$= \sqrt[٢]{٠,٥٢١٩} = \boxed{٠,٧٢٢٤}$$

(٥) <u>يتم إيجاد قيمة لوهـ ب ، لوهـ أ كالآتى</u> :

$$\text{لوهـ ب} = (\text{مجـ}_{٢} - \text{مجـ}_{١}) \times \frac{\text{جـ} - ١}{(\text{جـ}^{\text{ن}} - ١)^{٢}}$$

$$= (٥,٩٢٧ - ٤,٣٨٢) \times \frac{٠,٧٢٢٤ - ١}{(٠,٥٢١٩ - ١)^{٢}}$$

$$= ١,٥٤٥ \times \frac{-٠,٢٧٧٦}{٠,٢٢٨٦}$$

$$= \boxed{-١,٨٧٦}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{أ} = \frac{\text{١}}{\text{ن}}\left[\text{مجـ}_{\text{١}} - \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ب} \times \frac{\text{جـ}^{\text{ن}} - \text{١}}{\text{جـ} - \text{١}}\right)\right]$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left[\text{٤,٣٨٢} - \left(-\text{١,٨٧٦} \times \frac{\text{٠,٥٢١٩} - \text{١}}{\text{٠,٧٢٢٤} - \text{١}}\right)\right]$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left[\text{٤,٣٨٢} - \left(-\text{١,٨٧٦} \times \frac{-\text{٠,٤٧٨١}}{-\text{٠,٢٧٧٦}}\right)\right]$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left[\text{٤,٣٨٢} - (-\text{٣,٢٣٠٩})\right]$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left[\text{٤,٣٨٢} + \text{٣,٢٣٠٩}\right]$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{٧,٦١٢٩} = \boxed{\text{٣,٨٠٦٤}}$$

(٦) يتم التعويض عن قيم جـ ، لوهـ أ ، لوهـ ب فى نموذج منحنى جمبرتز الآتى :

لوهـ صَ = لوهـ أ + جـ^{س} لوهـ ب

لوهـ صَ = ٣,٨٠٦٤ + ٠,٧٢٢٤^{س} × ـ١,٨٧٦

$\boxed{\text{لوهـ صَ = ٣,٨٠٦٤ − ١,٨٧٦ × ٠,٧٢٢٤}^{\text{س}}}$

التنبؤ بالأرباح عام ٢٠٠٦ :

فى هذه الحالة يتم التعويض عن قيمة س الموجودة فى معادلة نموذج منحنى جمبرتز بالآتى :

(السنة المطلوب التنبؤ بها ـ أول سنة فى السلسلة)

(السنة المطلوب التنبؤ بها − أول سنة فى السلسلة)

لوهـ صَ = ٣,٨٠٦٤ ـ ١,٨٧٦ × ٠,٧٢٢٤^{س}

= ٣,٨٠٦٤ ـ ١,٨٧٦ × ٠,٧٢٢٤$^{(٢٠٠٦-٢٠٠٠)}$

= ٣,٨٠٦٤ ـ ١,٨٧٦ × ٠,٧٢٢٤^{٦}

= ٣,٨٠٦٤ − ١,٨٧٦ × ٠,١٤٢١

= ٣,٨٠٦٤ − ٠,٢٦٦٦

لوهـ صَ = $\boxed{٣,٥٣٩٨}$

ولإيجاد قيمة صَ يتم إيجاد العدد المقابل للرقم ٣,٥٣٩٨ وذلك ن طريق الضغط على زرار $\boxed{\text{Shift}}$ ثم الضغط على زرار $\boxed{\text{Ln}}$ فنحصل على

صَ = $\boxed{٣٤,٤}$

تمرين (٢)

سلسلة زمنية من عام ١٩٩٥ وحتى عام ٢٠٠٦ تعبر عن أرباح إحدى شركات غزل والنسيج بمئات الملايين من الجنيهات ، ثم تقسيم هذه السلسلة إلى ثلاث أقسام متساوية وكان مجموع القيم اللوغاريتمية للأقسام الثلاثة على التوالى هى :

مجـ١ لوهـ ص = ٢ ، مجـ٢ لوهـ ص = ٣ ، مجـ٣ لوهـ ص = ٣,٩

المطلوب : تقدير نموذج منحنى جمبرتز لأرباح هذه الشركة. ثم استخدم هذا النموذج للتنبؤ بأرباح هذه الشركة عام ٢٠٠٧.

الحـــل

	السنة	الأرباح (ص)	مجـ لوهـ ص
القسم الأول	١٩٩٥ ١٩٩٦ ١٩٩٧ ١٩٩٨		مجـ$_1$ = ٢
القسم الثانى	١٩٩٩ ٢٠٠٠ ٢٠٠١ ٢٠٠٢		مجـ$_2$ = ٣
القسم الثالث	٢٠٠٣ ٢٠٠٤ ٢٠٠٥ ٢٠٠٦		مجـ$_3$ = ٣,٩

ن = عدد القيم داخل كل قسم = ٤

يتم إيجاد قيمة جـ باتباع الآتي :

(أ) يتم إيجاد قيمة حـ^{ن} كالآتى :

$$حـ^{ن} = \frac{مجـ_{٣} - مجـ_{٢}}{مجـ_{٢} - مجـ_{١}}$$

$$\therefore حـ^{٤} = \frac{٣,٩ - ٣}{٣ - ٢}$$

$$\therefore حـ^{ن} = حـ^{٤} = \frac{٠,٩}{١} = \boxed{٠,٩}$$

(ب) يتم إيجاد قيمة حـ كالآتى :

$$جـ = \sqrt[ن]{حـ^{ن}}$$

$$= \sqrt[٤]{٠,٩} = \boxed{٠,٩٧٤}$$

ويتم إيجاد $\sqrt[٤]{٠,٩}$ باستخدام الآلة الحاسبة كالآتى :

- يتم كتابة الرقم ٠,٩ فى الآلة الحاسبة.
- يتم الضغط على زرار Shift .
- يتم الضغط على زرار ÷ .
- يتم الضغط على الرقم ٤ .
- يتم الضغط على الرقم = .

يتم إيجاد قيمة $لو_{هـ}$ ب ، $لو_{هـ}$ أ كالآتى :

$$لو_{هـ}\ ب = (مجـ_٢ - مجـ_١) \times \frac{جـ - ١}{(جـ^{ن} - ١)^{٢}}$$

$$= (٣ - ٢) \times \frac{٠,٩٧٤ - ١}{(٠,٩ - ١)^{٢}}$$

$$= ١ \times \frac{- ٠,٠٢٦}{٠,٠١}$$

$$= \boxed{- ٢,٦}$$

$$\text{لوهـ أ} = \frac{١}{\text{ن}}\left(\text{مجـ}_{١} - \left(\text{لوهـ ب} \times \frac{\text{جـ}^{\text{ن}} - ١}{\text{جـ} - ١}\right)\right)$$

$$= \frac{١}{٤}\left(٢ - \left(-٢,٦ \times \frac{٠,٩ - ١}{٠,٩٧٤ - ١}\right)\right)$$

$$= \frac{١}{٤}\left(٢ - \left(-٢,٦ \times \frac{-٠,١}{-٠,٠٢٦}\right)\right)$$

$$= \frac{١}{٤}\left(٢ - (-١٠)\right)$$

$$= \frac{١}{٤}\left(٢ + ١٠\right)$$

$$= \frac{١}{٤} \times ١٢ = \boxed{٣}$$

يتم التعويض عن قيم جـ ، لوهـ أ ، لوهـ ب في نموذج منحنى جمبرتز الآتي :

$$\text{لوهـ } \hat{\text{ص}} = \text{لوهـ أ} + \text{جـ}^{\text{س}}\,\text{لوهـ ب}$$

$$\text{لوهـ } \hat{\text{ص}} = ٣ + ٠,٩٧٤^{\text{س}} \times -٢,٦$$

$$\boxed{\text{لوهـ } \hat{\text{ص}} = ٣ - ٢,٦ \times ٠,٩٧٤^{\text{س}}}$$

التنبؤ بالأرباح عام ٢٠٠٧ :

$$\text{لوهـ } \hat{\text{ص}} = ٣ - ٢,٦ \times ٠,٩٧٤^{\text{س}} \quad \left(\text{السنة المطلوب التنبؤ بها} - \text{أول سنة في السلسلة}\right)$$

$$= ٣ - ٢,٦ \times ٠,٩٧٤^{(٢٠٠٧-١٩٩٥)}$$

$$= ٣ - ٢,٦ \times ٠,٩٧٤^{١٢}$$

$$= ٣ - ٢,٦ \times ٠,٧٢٨٩$$

$$= ٣ - ١,٨٩٥١٤$$

$$= \boxed{١,١٠٤٨٦}$$

ولإيجاد قيمة $\hat{\text{ص}}$ يتم إيجاد العدد المقابل للرقم ١,١٠٤٨٦ وذلك عن طريق الضغط على زرار **Shift** ثم الضغط على زرار **Ln** فنحصل على

$$\hat{\text{ص}} = \boxed{٣,٠١٨}$$

خامسا : نموذج الودائع :

الودائع كدالة فى الزمن الودائع كدالة فى سعر الفائدة

١ نموذج الودائع كدالة فى الزمن :

معادلة نموذج الودائع كدالة في الزمن تأخذ الشكل الآتي :

$$\boxed{\hat{\text{ص}} = \hat{\text{أ}} + \hat{\text{ب}}\ \text{س}}$$

حيـث :

ص : الودائـع

س : الزمـــن = صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ....

- **<u>تقديـــر النمـــوذج</u>** :

خطوات تقدير هذا النموذج هى نفس خطوات تقدير النموذج الخطى البسيط باستخدام الطريقة المختصرة بدون أى تغيير.

- **<u>اختبار جوهرية النموذج</u>** :

خطوات هذا الاختبار هى نفس خطوات اختبار جوهرية النموذج الخطى البسيط بدون أى تغيير.

- **<u>استخدام نموذج الودائع فى تقدير او التنبؤ بالودائع</u>** :

يتم التنبؤ بالودائع عن طريق التعويض بقيمة س (الزمن) لأى سنة مستقبلية فى النموذج السابق فنحصل على قيمة $\hat{\text{ص}}$.

- **<u>الحكم على سياسة الودائع (تقييم سياسة الودائع)</u>** :

يتم قسمـة $\dfrac{\text{الودائع الفعلية (ص)}}{\text{الودائع المقدرة } (\hat{\text{ص}})}$

وهناك حالتيـــن

إذا كـــان $\dfrac{\text{ص}}{\hat{\text{ص}}} \geq 1$ ← ∴ سياسة الودائع سليمة

إذا كـــان $\dfrac{\text{ص}}{\hat{\text{ص}}} < 1$ ← ∴ سياسة الودائع غير سليمة

الباب الخامس

تحليل السلاسل الزمنية

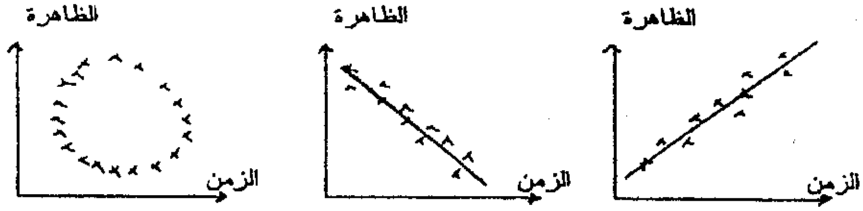
Time Serice

مقدمـة :

فـي الربع الأخير من سنه ٢٠٠٨ أفلست بنوك كبرى وأغلقت شركات عملاقة وانتقلت معظم الدول إلى مصاف الدول المدينة، كما تحولت الكثير من الحسابات إلـى خانـة الديـون المعدومة لدرجة أن مشكلة الشرق الأوسط تعلقت بأهداف Dow Jones و Nasadq فإذا ارتفعت هذه المؤشرات خلال سنه ٢٠١٠ كان هـناك حل معين لهذه المشكلة وإذا خفضت كان هناك حل آخر أما إذا استقرت تلك المؤشرات أجلت هذه المشكلة إلى أجل غير مسمى والأمر كله متوقف على دقـة التنبؤ بسلوك تلك المؤشرات، فلو كان هناك تنبوء جيد بأسلوب علمي سليم لمـا حـدث مـا حدث فما من فرد في المجتمع إلا وكان التأثير السلبى للأزمة الحالـية لـه بالمرصـاد اللهـم إلا الأشخاص والأسر الأكثر فقراً في المجتمع ومعدومى الدخل فكانت هذه الأزمة لهم بمثابة قبلة الحياة والتي لولا أن منّ الله علـيهم بها لماتوا جوعاً وكأن تلك الأزمة الحالية ضريبة اجبارية أراد بها رب الـسموات والأرض أن تدفـع لانقاذ أولئك المساكين(فالأزمة جعلت المعروض أكثـر مـن المطلوب فأنخفضت أسعار المواد الغذائية الأساسية من قمح وأرز وزيت وخلافه إلى ربع ما كانت عليه قبل حدوث الأزمة).

وقد اقتصرت التنبؤات قبل وبعد الأزمة على توقعات أشبه ما تكون بقراءة الكف أو ضرب الودع من أناس يدعون أنهم خبراء المال والاقتصاد والأسواق المالية ويدبجـون الخرائط البيانية الخاصة بالشموع اليابانية وأشكال المطرقة المقلوبة وحفـار القبور وينلفح الآخرون بما يسمي بموجات اليوت ذلك لبيان نقاط الدعم والمقاومة وتحديد مناطق المتاجرة وتحديد نقط ايقاف الخسائر والشئ الغريب أن المؤسسات المالية والاقتصادية وأفراد المجتمع – حيث أن الأفراد يحتلون أكثر مـن ٦٥% من حجم السوق – مازالوا يصدقونهم ويعملون بنصائحهم ويدفعون لهـم الملايين، ولو كان أحد منهم يعرف حقاً مجرد التنبؤ السليم بأحوال السوق لما كان ما كان ولأصبح اليوم أغنى رجل في العالم، والشئ الأغرب أن الجميع انبرى في تحديد أسباب الأزمة المالية وتناسوا أن تنبؤاتهم المضللة كانت ضمن

الأسباب الرئيسية لتلك الأزمة وسنحاول في هذه المساحة المحدودة جداً من هذا المؤلف الدراسي أن نقدم بعض الأساليب الإحصائية الخاصة بالتنبؤ بقيم المتغيرات الاقتصادية وسلوكها في المستقبل من خلال ما يسمى بتحليل السلاسل الزمنية.
ويمكن القول أن السلسلة الزمنية هي تعبير رقمي عن قيمة ظاهرة ما (أسعار – انتاج – ارباح – مبيعات ...) خلال فترات زمنية متتالية (سنوات، إرباع سنوات، شهور، أيام ، ساعات ..) ويفترض أن المتغير المؤثر في الظاهرة هو الزمن، فالزمن يعتبر محصلة للمتغيرات الاقتصادية والاجتماعية والسياسية والبيئية المؤثرة في الظاهرة محل الدراسة بعض هذه المتغيرات تؤثر تأثيرا ايجابيا وبعضها يؤثر تأثيرا سلبيا والبعض الآخر لا يؤثر في الظاهرة كما يتضح في الشكل (A) التالي والمجموع الجبري للقوى السابقة يعبر عنه بمتغير واحد هو الزمن.



تأثير ايجابي تأثير سلبي لا يوجد تأثير

شكل (A) يبين اتجاه تأثير الزمن على الظاهرة

والهدف الأساسي من تحليل السلاسل الزمنية هو استشراق المستقبل وفهم الحاضر واستيعاب الماضي عن طريق التنبؤ بسلوك الظواهر الاقتصادية في المستقبل إلى جانب تحليل القوى المؤثرة فيها وطريقة تأثيرها وعلاقاتها مع المتغيرات الأخرى.

وهناك ثلاث خطوات متتالية لتحليل السلاسل الزمنية هي :

١- **الخطوة الأولى** : رسم بيانات السلسلة بيانيا على شكل الانتشار Scatter Diagram والذي يعطي فكرة مبدئية عن شكل وقوة واتجاه العلاقة ونوع النموذج المقترح وهل هو نموذج خطي Linear Model أو منحنى Quadratic أو نموذج أسي Exponential وإلى أي درجة من العلاقات الآسية ينتمي النموذج أم أن النموذج يتبع الدالة العكسية Inverse Model أم أنه لوغاريتمي Logarithmic Model أو غير ذلك.

٢- **الخطوة الثانية** : اختيار الفترة الزمنية التى سيتم دراستها واستبعاد باقى السلسلة الزمنية مثال ذلك إذا كان لدينا سلسلة زمنية عن أسعار الإغلاق اليومى لأحد الأوراق المالية والتى تبدأ من سنه ١٩٩٨ وأردنا استبعاد السبعة سنوات الأولى بفرض أن حركة الأسهم كانت غير نشطة فى تلك الفترة واكتفينا بدراسة العشرة سنوات الأخيرة.

٣- **الخطوة الثالثة** : تحديد ما إذا كنا سنتناول البيانات الأصلية للسلسلة أم سيتم استبدالها بسلاسل زمنية بديلة تكون أكثر تعبيرا عن الظاهرة محل الدراسة مثال ذلك:

أ- **السلسلة الشاملة** : والتى تكون البيانات فيها مسجلة عن كل ساعة مثلا بدلا من كونها مسجلة عن كل يوم فتكون أكثر شمولا وأكثر تفصيلا ومبينة للتباين خلال الفترات الزمنية المختلفة.

ب- **سلاسل النسب المئوية** : والتى تكون المشاهدات فيها عبارة عن نسبة مئوية مثل النسبة المئوية للمرتجع من المبيعات بدلا من دراسة كمية المرتجع أو دراسة النسبة المئوية للتالف بدلا من دراسة كمية التالف.

ج- **السلاسل الزمنية للفروق** : والتى تكون البيانات بها عبارة عن الفرق بين مبيعات فترة معينة ومبيعات الفترة السابقة $(Y_t - Y_{t-1})$ مثلا وبذلك تعبر المشاهدات عن التغير الذى يحدث فى الظاهرة خلال فترة زمنية واحدة

د- **السلاسل الزمنية المخلصة من التضخم** : والناتجة من خارج قسمة البيانات المالية - الخاصة بالأسعار والأرباح والأجور والمبيعات وغيرها - على الرقم القياسى لتكلفة المعيشة فتنتج مشاهدات جديدة خالصة من آثار التضخم وتكون أكثر تعبيرا عن الظاهرة.

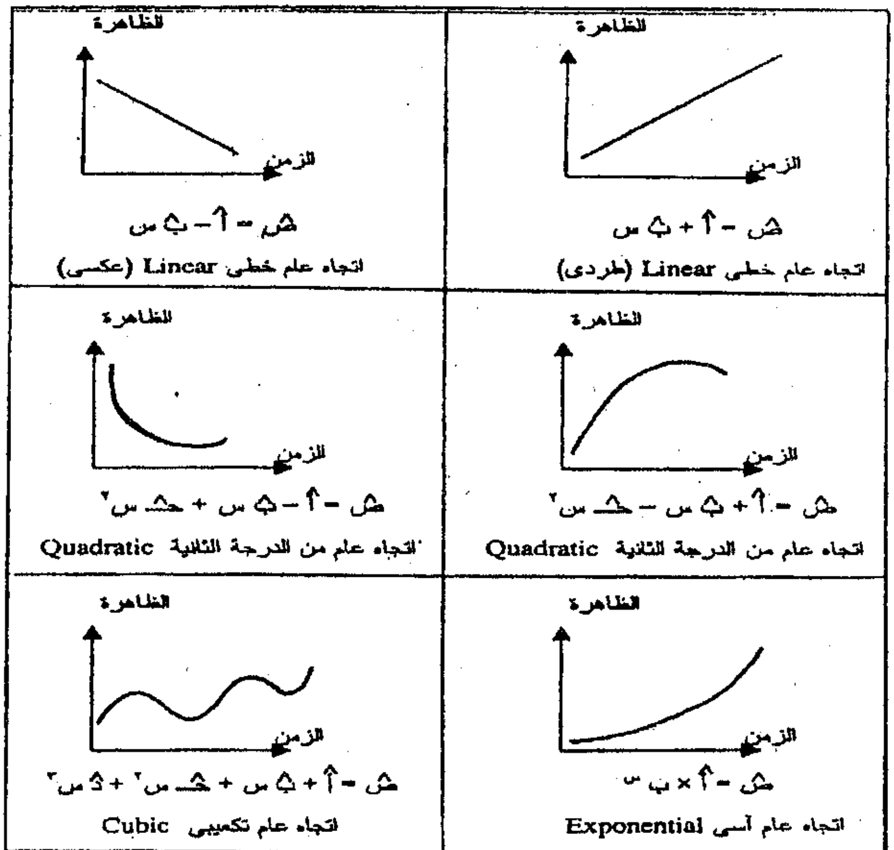
وهناك العديد من أشكال السلاسل الزمنية البديلة والتى يمكن أن تكون أكثر الهاما من السلاسل الأصلية عند تحليل السلاسل الزمنية.

وعموماً فإن قيمة أى ظاهرة عبر الزمن تتأثر بأربعة عناصر أساسية هى :

١- **الاتجاه العام : Secular Trend (T)**

ويقصد به التغيرات المنتظمة فى قيمة السلسلة الزمنية خلال فترة زمنية طويلة نسبياً ويعتبر الاتجاه العام أهم عناصر السلسلة الزمنية وكثيراً ما تبنى التنبؤات بناءاً عليه وحدة، ويعتبر الاتجاه العام للسلسلة الزمنية موجبا إذا كانت السلسلة الزمنية فى تزايد مستمر بصفة عامة عبر الزمن مثال ذلك الكميات المستهلكة من السلع الغذائية ومن البنزين ومن مياه الشرب وأغلب الظواهر

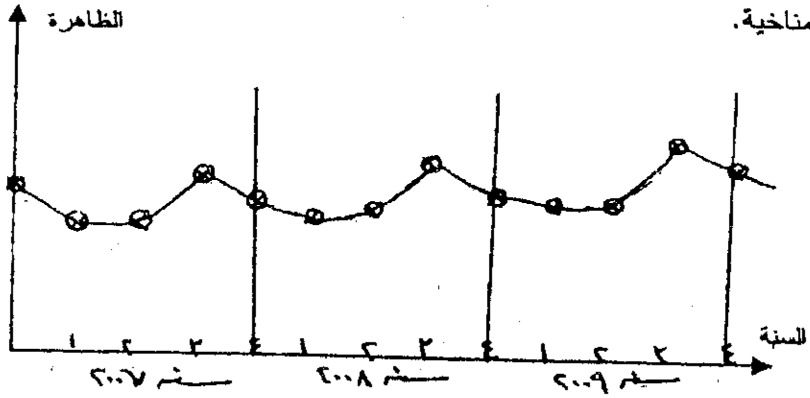
الاقتصادية، كما تعتبر السلسلة ذات اتجاه عام سالب إذا كانت الظاهرة في تناقص مستمر بصفة عامة عبر الزمن ومثال ذلك أسعار السلع التكنولوجية الحديثة مثل أسعار الكمبيوتر والتليفون المحمول والتليفزيون من ماركة وموديل محدد أو نسبة الأمية إلى إجمالي السكان أو نسبة الوفيات من الأطفال الرضع وغيرها، وقد يكون الاتجاه العام في الجزء الأول من الظاهرة صاعداً وفي جزئها الأخر هابطاً ولكن التغير لا يكون فجائيا ولكنه يحدث ببطء كما في حالة زيادة المبيعات من سلعة معينة ثم استقرارها فترة ثم انخفاضها بعد ذلك ويحدث ذلك عند ظهور موديلا جديد لنفس السلعة كما في حالة كمية المبيعات من ماركة معينة للتليفون المحمول والسلسلة في هذه الحالة تتبع النموذج التربيعي Quadraticوشكل (B) التالي يوضح بعض أشكال الاتجاه العام.



شكل (B)

٢- التغيرات الموسمية : Seasonal Variations

وتتمثل في التقلبات التي تحدث سنوياً للظاهرة الاقتصادية نتيجة المواسم والأعياد والفصول المناخية وغيرها وبالتالي فإنها تؤثر في الظاهرة بالزيادة أو النقص تبعاً لطبيعة هذه المواسم وشكل (C) التالي يمكن أن يلقي الضوء على التغيرات الموسمية بفرض أنها تحدث (٤) مرات في السنة نتيجة الفصول المناخية.

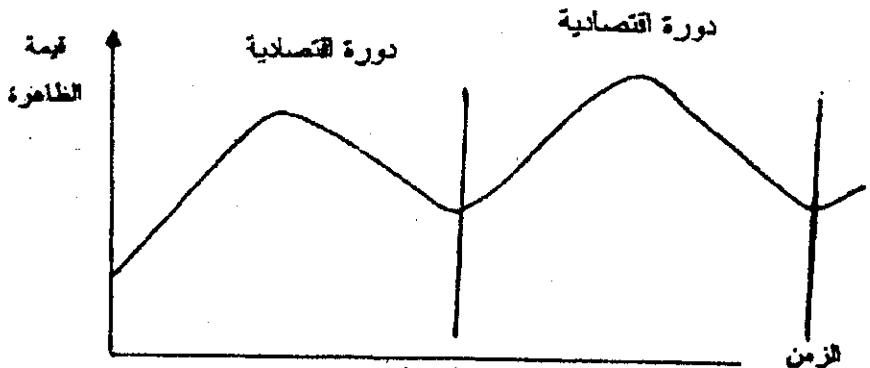


شكل (C)

٢- التغيرات الدورية : Cyclical Variations :

هي التغيرات التي تحدث للظاهرة الاقتصادية كل عدة سنوات قد تكون ٣ أو ٤ أو ٥ سنوات أو أكثر على حسب طول الدورة الاقتصادية وطبيعة السلعة محل الدراسة.

حيث أن الظاهرة الاقتصادية تبدأ بالنمو إلى أن تصل إلى أقصى قيمة لها ثم تبدأ في الهبوط التدريجي إلى أن تصل إلى أدنى قيمة لها ثم تبدأ بعد ذلك في الصعود وهكذا يكون طول الدورة هو الوقت من أول صعوداً إلى أول صعود تالي ويستغرق ذلك عادة عدة سنوات، وشكل (D) التالي يبين هذه الدورات.



شكل (D)

يبين التغيرات الدورية

٤- التغيرات الفجائية أو العرضية **Irregular variations : I**

وهى التغيرات التى تحدث لأسباب لا يمكن التنبؤ بها ولا بآثارها على قيم السلسلة الزمنية ومثال ذلك أى خبر اقتصادى أو اجتماعى أو سياسى أو بيئى غير متوقع كما حدث فى حالة حصول شركة اتصالات الإماراتية على الرخصة الثالثة للمحمول بمبلغ (١٨) مليار جنيه مصرى وكان المتوقع لهذه الرخصة مبلغ فى حدود (٣) مليار فقط الأمر الذى رفع جميع أسعار الأوراق المالية بحوالى (١٢%) خلال ثانية واحدة ثم توالت الأوراق المالية فى الصعود إلى حوالى (٢٥%) خلال ٣ أيام فقط وترتب على ذلك ارتفاع أسعار الأراضى والعقارات وغيرها فى نفس التوقيت، وبالعاكس فأن الخبر المفاجئ السئ يؤدى إلى هبوط السوق كله بدرجة غير متوقعة كما حدث عند القبض على أحد رجال الأعمال بتهمة التورط فى جريمة قتل مما أدى إلى انخفاض أسهم شركته وهى من الشركات القائدة فى السوق عند أول ثانية فى بداية افتتاح الجلسة مما كان له ابلغ التأثير السلبى على السوق كله لفترة بلغت حوالى سنه ونصف وفى اليوم الذى قبلت فيه محكمة النقض قبول الطعن على الحكم ارتفع السهم الخاص بشركته بحوالى (١١%) وذلك فى يوم واحد، وقد يكون الخبر الإيجابى سياسى مثال ذلك الإعلان عن زيارة أوباما لمصر أو سلبى مثل الهجوم على جنوب

لبنان أو ضرب غزه أو حتى رفض إيران التوقف عن تخصيب اليورانيوم وهذه التغيرات الفجائية لا يمكن تجنبها ولكن يمكن التقليل من آثارها إذا عولجت بحكمة وحنكه شديدين وذلك كما حدث في ١١ سبتمبر سنه ٢٠٠١ عند ضرب برجي التجارة العالمي إذا أعلن خلال ساعة واحدة إغلاق سوق الأوراق المالية في الولايات المتحدة الأمريكية لمدة (٣) أيام إلى أن أمتص الخبر وهدأ روع الناس وفتح السوق بعد هذه الأيام الثلاثة على استقرار نسبي ولولا ذلك لتحطم أكبر سوق للأوراق المالية في العالم ولانهار الاقتصاد الأمريكي وتبعته باقي اقتصاديات العالم.

كما تحدث التغيرات الفجائية كذلك كنتيجة طبيعية للزيادة المستمرة والسريعة والمتتالية في الأسعار على صورة انهيار تام لجميع الأسواق بصورة مفاجئة فيما يعرف بظاهرة الفقعة – والتي يمكن إفراد دراسة خاصة بها – كما حدث في الأزمة المالية الأخيرة.

كذلك تحدث التغيرات الفجائية نتيجة للظواهر الطبيعية غير المتوقعة مثل الزلازل والبراكين والفيضانات وغيرها، إلا أن آثار هذه الظواهر تكون محدودة الزمان والمكان حيث أنها غالباً ما تحدث بلدان في محددة ليس لها تأثير على الاقتصاد العالمي كما أن هذه الدول غالباً ما تكون مهمشه وغير مصنفة عالمياً.

وسوف نقسم هذا الباب إلى ثلاثة أجزاء أساسية الجزء الأول يختص بالاتجاه العام الخطي وغير الخطي والجزء الثاني يختص بمعادلات النمو أما الجزء الثالث فيختص بالتغيرات الموسمية وأثرها على التنبؤ مع التركيز على المفاضلة بين النماذج المقدرة على أساس احصائي وإجراء اختبارات المعنوية الإحصائية اللازمة لمعرفة مأمونية التنبؤ وعمل فترات ثقة للتنبؤ بقيم الظواهر الاقتصادية باحتمال ٩٥% مع التطبيق على البرنامج الأحصائي (SPSS) في حل جميع الأمثلة الواردة.

أولا : الاتجاه العام .
Secular Trend

يفترض أن الزمن (س) هو المتغير المؤثر فى الظاهرة الاقتصادية محل القياس، وفى هذه الحالة يعتبر الزمن هو المتغير المفسر والذى يمكن أن يأخذ القيم ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ويمكن أن يكون للاتجاه العام عدة صور منها الخطى وغير الخطـــى والذى يمكن أن ينقسم بدوره إلى اتجاه عام من الدرجة الثانية أو أحدى معادلات النمو [الأسية أو الأسية المعدلة أو جمبرتز] أو غيرها.

١ـ الاتجاه العام الخطى : Linear

هناك العديد من الظواهر الاقتصادية تتبع معادلة الدرجة الأولى أو معادلة الاتجاه العام الخطى الذى يأخذ الصورة.

$$\hat{ص} = \hat{أ} + \hat{ب}\, س$$

حيث أن :

$\hat{ص}$: هى القيمة المقدرة أو الاتجاهية للظاهرة (ص)

س : وحدات الزمن وتساوى ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ....

$\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$: معالم المعادلة المقدرة

ويمكن اعتبار أن ($\hat{أ}$) هى القيمة الاتجاهية لــ (ص) عندما س = صفرا أو عند نقطة الأساس و($\hat{ب}$) : هى ميل الخط المستقيم بحيث إذا كانت قيمة ($\hat{ب}$) موجبة الإشارة كان الاتجاه العام للظاهرة فى تزايد وبالعكس إذا كان ($\hat{ب}$) سالبة الإشارة دل ذلك على تناقص قيمة الظاهرة مع الزمن.

ويمكن اكتشاف ما إذا كانت الظاهرة تتبع الاتجاه العام الخطى أم لا عن طريق وضــع النقط الخاصة بقيمة الظاهرة على شكل الانتشار، فإذا كانت النقط تتجه إلـــى أن تكـــون خطـــأ مستقيما كما فى شكل (B) السابق فإن أغلب الظن أن معادلة الدرجة الأولى يمكن أن تمثل الظاهرة.

تقدير معادلة خط الاتجاه العام :

تعتبــر طــريقة المربعات الصغرى Least Squares هى أفضل وأدق طريقة لتقدير معالم معادلة خط الأتجاه العام وذلك لأنها تجعل مجموع مربعات انحرافات القيم عن الخط المقدر أصغر ما يمكن ولذلك فإن المعالم المقدرة بهذه الطــريقة تتصف بأنها أحسن تقديرات خطية غير متحيزة (BLUE) ويتم ذلك عن طريق حل المعادلتين الطبيعيتين الآتيتين من :

مجـــ ص = ن أ + ب مجـــ س

مجـــ س ص = أ مجـــ س + ب مجـــ $س^2$

حيث أن :

مجـــ ص : مجموع قيم المتغير المراد قياسه أو الظاهرة المراد قياسها.

مجـــ س : مجموع قيم الزمن والزمن يأخذ القيم ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ...

ن : عدد قيم الظاهرة

أ ، ب : المعالم المراد تقديرها

مثال (١ – أ)

البـــيانات الآتـــية تمثل قيمة الأرباح من سلعة ما خلال الفترة من سنه ٢٠٠٣ إلى سنة ٢٠٠٩.

السنة	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩
الأرباح	٤	٥	٧	٦	٨	١٢	١٤

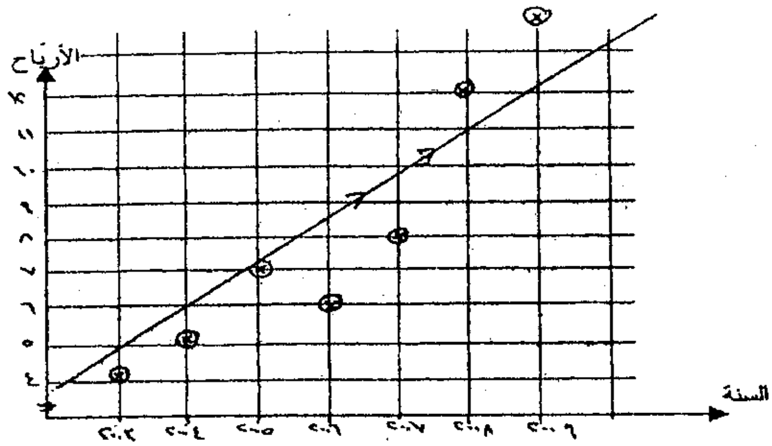
والمطلوب :

١- ارسم شكل الانتشار ومنه تبين نوع العلاقة.

٢- قدر معادلة الاتجاه العام المناسبة.

الحــــل :

أولا : رسم شكل الانتشار



شكل الانتشار السابق يشير إلى أن العلاقة خطية لذلك فإن الشكل المقترح هو معادلة خط الاتجاه العام :

$\hat{ص} = \hat{أ} + \hat{ب}.س$

ولتقدير معالم المعادلة ($\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$) يتم حل المعادلتين الآتيتين معاً :

مجـ ص = ن أ + ب مجـ س

مجـ س ص = أ مجـ س + ب مجـ $س^٢$

والذى يستلزم عمل الجدول الآتى :

السنه	ص	س	س ص	$س^٢$	$ص^٢$
٢٠٠٣	٤	٠	٠	٠	١٦
٢٠٠٤	٥	١	٥	١	٢٥
٢٠٠٥	٧	٢	١٤	٤	٤٩
٢٠٠٦	٦	٣	١٨	٩	٣٦
٢٠٠٧	٨	٤	٣٢	١٦	٦٤
٢٠٠٨	١٢	٥	٦٠	٢٥	١٤٤
٢٠٠٩	١٤	٦	٨٤	٣٦	١٩٦
مجـ	٥٦	٢١	٢١٣	٩١	٥٣٠

يلاحظ أن :

ن = ٧   مجـ ص = ٥٦   مجـ س = ٢١

مجـ س ص = ٢٣   مجـ $س^٢$ = ٩١

وبالتعويض فى المعادلتين السابقتين نجد أن :

٥٦ = ٧ أ + ٢١ ب ←——— (١)

٢١٣ = ٢١ أ + ٩١ ب ←——— (٢)

بضرب المعادلة (١) × ٢١

بضرب المعادلة (٢) × ٧

ينتج الآتى :

١١٧٦ = ١٤٧ أ + ٤٤١ ب ←——— (٣)

١٤٩١ = ١٤٧ أ + ٦٣٧ ب ←——— (٤)

بطرح المعادلة (٤) من المعادلة (٣) ينتج أن :

٣١٥ = ١٩٦ ب

$$\therefore \hat{\text{ب}} = \frac{\text{٣١٥}}{\text{١٩٦}} = \text{١,٦٠٧}$$

بالتعويض فى المعادلة (١) عن (ب) = ١,٦٠٧ ينتج أن :

٥٦ = ٧أ + ٢١ (١,٦٠٧)

٥٦ = ٧ أ + ٣٣,٧٤٧

٥٦ − ٣٣,٧٤٧ = ٧ أ

٢٢,٥٢٣ = ٧ أ

$$\therefore \hat{\text{أ}} = \frac{\text{٢٢,٢٥}}{\text{٣}} = \text{٣,١٧٩}$$

وبالتالى فإنه يمكن التعبير عن معادلة خط الاتجاه العام بالعلاقة الآتية :

$$\boxed{\hat{\text{ص}} = \text{٣,١٧٩} + \text{١,٦٠٧ س}}$$

حيث أن نقطة الأساس هى سنة ٢٠٠٣ ، (س) تمثل بعداً سنوياً

ويلاحظ : أنه يمكن استنتاج قيم المعالم (أَ ، بَ) من المعادلتين الطبيعيتين كالآتى:

$$\boxed{\hat{\text{ب}} = \frac{\text{مجـ س ص} - \dfrac{\text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن}}}{\text{مجـ س}^{٢} - \dfrac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}}}}$$

$$\boxed{\hat{\text{أ}} = \bar{\text{ص}} - \hat{\text{ب}}\,\bar{\text{س}}}$$

مجموع مربعات الخطأ والخطأ المعيارى للنموذج :

البواقـــى (و) هـــى الفرق بين القيمة الحقيقية (ص) والقيم المقدرة ($\hat{ص}$) ويستخدم مجموع مربعات الخطأ أو مجموع مربعات البواقى

مجـــــ و^{٢} = مجـــ (ص – ص)^{٢} فى المفاضلة بين النماذج المقدرة على أساس أن الـــنموذج الـــذى له أصغر مجموع مربعات بواقى هو الأكثر قرباً ومحاكاة للواقع وبالتالى فهو النموذج الأفضل، كذلك تستخدم مجموع مربعات البواقى في ايجـــاد تباين التقدير ($\sigma^{٢}$)، حيث أن تباين التقدير عبارة عن (مجـــ و^{٢}) مقسوماً على درجات الحرية الخاصة بالنموذج المقدر كما يستخدم تباين التقدير فى إيجاد الخطأ المعيارى للتقدير والخطأ المعيارى للتنبؤ كما سنرى لاحقا والمثال التالى يبين ذلك.

مـــثال (١ – ب) : مـــن المثال السابق المطلوب : ايجاد مجموع مربعات الخطأ وكذلك الخطأ المعيارى للتقدير.

الحـــــل :

السنة	القيمة الفعلية ص	الزمن س	القيمة الاتجاهية $\hat{ص}$ = ٣,١٧٩ + ١,٦٠٧ س	البواقى و ص – $\hat{ص}$	مربعات البواقى و^{٢} (ص – $\hat{ص}$)^{٢}
٢٠٠٣	٤	٠	ص= ٣,١٧٩ + ١,٦٠٧ (٠) = ٣,١٧٩	٠,٨٢١	٠,٦٧٤٧
٢٠٠٤	٥	١	ص= ٣,١٧٩ + ١,٦٠٧ (١) = ٤,٧٨٦	٠,٢١٤	٠,٠٤٥٩
٢٠٠٥	٧	٢	ص= ٣,١٧٩ + ١,٦٠٧ (٢) = ٦,٣٩٣	٠,٦٠٧	٠,٣٦٨٥
٢٠٠٦	٦	٣	ص= ٣,١٧٩ + ١,٦٠٧ (٣) = ٨,٠٠٠	٢-	٤,٠٠٠
٢٠٠٧	١٢	٤	ص= ٣,١٧٩ + ١,٦٠٧ (٥) = ١١,٢١٤	٠,٧٨٦	٠,٦١٧٣
٢٠٠٨	١٤	٥	ص= ٣,١٧٩ + ١,٦٠٧ (٦) = ١٢,٨٢١	١,١٧٩	١,٣٨٩٠
مجـــ	٥٦				٩,٦٧٨٦

ويلاحظ أن مجموع مربعات البواقى = مجـــ و^{٢} = مجـــ (ص – $\hat{ص}$)^{٢} يمكن أن يأتى بالعلاقة

مجـ (ص − صَ̂)^{٢} = مجـ ص^{٢} − أ̂ مجـ ص − ب̂ مجـ س ص

وبالتعويض فى العلاقة السابقة ينتج أن :

مجـ (ص − صَ̂) = ٥٣٠ − ٣,١٧٩ (٥٦) − ١,٦٠٧ (٢١٣)

مجـ و^{٢} = ٥٣٠ − ١٧٨ − ٣٤٢,٣٢١ = ٩,٦٧٨٦

ويستخدم مجمـوع مربعات البواقى فى إيجاد تباين التقدير والذى يطلق عليه تباين المعادلة أو تباين النموذج (σ^2)

$$\sigma^{2} = \frac{\text{مجموع مربعات البواقى}}{ن - ٢}$$

$$\sigma^{2} = \frac{\text{مجـ و}^{٢}}{ن - ٢} = \frac{٩,٦٧٨٦}{٥} = ١,٩٣٦$$

∴ الخطأ المعيارى للتقدير أو للمعادلة أو للنموذج

$$\sigma = \sqrt{\sigma^{2}} = \sqrt{١,٩٣٦} = ١,٣٩١$$

اختبار معنوية النموذج احصائياً والتنبؤ بقيمة الظاهرة فى المستقبل :

لابـد من التأكد من جوهرية للنموذج المقدر احصائيا ومن ثم قدرته على التنبؤ قبل عمل أى تنبؤات لقيمة الظاهرة فى المستقبل ويستخدم اختبار (ت) (T test) لهذا الغرض كالآتى :

(١) الاختبار :

$$ت_{\text{المحسوبة}} = \left| \frac{\hat{ب}}{ع_{ب}} \right|$$

< ت النظرية

∴ النموذج غير جوهرى احصائيا أو راجع للصدفة ولا يمكن الاعتماد عليه فى التنبؤ

≥ ت النظرية

∴ النموذج جوهرى احصائيا ويمكن الاعتماد عليه فى التنبؤ

حيث أن :

$\hat{ب}$: هى المعامل السابق تقديره

$ع_{\hat{ب}}$: هو الخطأ المعيارى ل ($\hat{ب}$) = $\sqrt{\dfrac{\sigma^{٢}}{مجـ\ س^{٢} - \dfrac{(مجـ\ س)^{٢}}{ن}}}$

(٢) التنبؤ :

ويتم على خطوتين كالآتى :

أ- **التنبؤ بنقطة** : ويتم عن طريق التعويض عن قيمة (س) فى معادلة خط الأتجاه العام بالفرق بين السنة المراد التنبؤ بقيمتها وسنة الأساس.

فإذا كان المطلوب مثلا التنبؤ بأرباح سنه ٢٠١٠ فى المثال السابق

فإن القيمة المقدرة فى هذه الحالة $\hat{ص}$ = ٣,١٧٩ + ١,٦٠٧ (٧) = ١٤,٤٢٨

حيث أن البعد بين سنه ٢٠١٠ وسنة الأساس (٢٠٠٣) هو (٧) سنوات

ب- **التنبؤ بفترة ثقة ٩٥%** : إذا أردنا عمل فترة ثقة للتنبؤ فيمكن أن يكون على الصورة الآتية.

$$\boxed{\hat{ص} \pm ت_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sigma_{\hat{ص}}}$$

حيث أن : $\hat{ص}$: التنبؤ بنقطة كما تم بيانه

$ت_{\frac{\alpha}{٢}}$: هى قيم ت النظرية عند درجات حرية (ن − ٢) مستوى معنوية α = ٥%

$$\hat{\sigma}_{س} = \sqrt{\sigma^{٢} \left(١ + \dfrac{١}{ن} + \dfrac{(س_{ن} - \bar{س})^{٢}}{مجـ\ (س - \bar{س})^{٢}}\right)}$$

حيث أن :

$س_{ن}$: قيم س فى فترة التنبؤ أو البعد بين السنة المراد التنبؤ بها وسنة الأساس

$\bar{س}$: متوسط قيم س

مثال (١ − جـ) : المطلوب اختبار جوهرية النموذج المقدر فى المثال (١) والتنبؤ بقيمة الأرباح سنه ٢٠١٠ وذلك مرة بنقطة ومرة بفترة ثقة ٩٥% إذا علمت أن $ت_{٠,٠٢٥،ر}$ = ٢,٥٧١

الحـــــل :

من التمرين السابق :

النموذج المقدر $\boxed{\hat{ص} = ٣,١٧٩ + ١,٦٠٧ \text{ س}}$ بأساس سنه ٢٠٠٣

، س = بُعد سنوى

مجـــ س = ٢١ مجـــ ص = ٥٦ مجـــ س ص = ٢١٣

مجـــ $س^٢$ = ٩١ مجـــ $ص^٢$ = ٥٣٠

∴ الخطأ المعيارى ل $(\hat{ب})$ = $ع_{\hat{ب}} = \sqrt{\dfrac{\sigma^٢}{\text{مجـــ } س^٢ - \dfrac{(\text{مجـــ س})^٢}{ن}}}$

$$= \sqrt{\dfrac{١,٩٣٦}{٩١ - \dfrac{(٢١)^٢}{٧}}} = \sqrt{\dfrac{١,٩٣٦}{٢٨}} = ٠,٢٦٥$$

الاختبار : $ت_{\text{المحسوبة}} = \left| \dfrac{\hat{ب}}{ع_{\hat{ب}}} \right| = \left| \dfrac{١,٦٠٧}{٠,٢٦٥} \right| = ٦,٠٦٤$

وحيث أن $ت_{\text{المحسوبة}} > ت_{\text{النظرية}}$

∴ النموذج أو المعادلة السابقة جوهرية اخصائياً ويمكن الأعتماد عليها فى التنبؤ وذلك بمستوى معنوية α = ٥%

التنبؤ بأرباح سنه ٢٠١٠ :

أولا : التنبؤ بنقطة : $\hat{ص} = ٣,١٧٩ + ١,٦٠٧$ س بأساس سنه ٢٠٠٣

$$\hat{ص}_{٢٠١٠} = ٣,١٧٩ + ١,٦٠٧ \; (٧) = ١٤,٤٢٨$$

ثانياً : التنبؤ بفترة ثقة ٩٥%

الخطأ المعيارى للتنبؤ

$$\sigma_{\hat{ش}} = \sqrt{\sigma^{٢}} \sqrt{١ + \frac{١}{ن} + \frac{(س_{ف} - \bar{س})^{٢}}{مجـ (س - \bar{س})^{٢}}}$$

$$= \sqrt{١,٩٣٦} \sqrt{١ + \frac{١}{٧} + \frac{(٧ - ٣)^{٢}}{٢٨}}$$

$$= \sqrt{١,٩٣٦ \times ١,٧١٤} = \sqrt{٣,٣١٩} = ١,٨٢٢$$

فترة الثقة للتنبؤ :

$$\boxed{\hat{ص} \pm ت_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sigma_{\hat{ش}}}$$

$$١٤,٤٢٨ \pm ٢,٥٧١ \times ١,٨٢٢$$

$$١٤,٤٢٨ \pm ٤,٦٨٣$$

الحد الأدنى لأرباح سنه ٢٠١٠ = ١٤,٤٢٨ − ٤,٦٨٣ = ٩,٧٤٥

الحد الأعلى لأرباح سنه ٢٠١٠ = ١٤,٤٢٨ + ٤,٦٨٣ = ١٩,١١١

وذلك باحتمال ٩٥%

استخدام البرنامج الأحصائى SPSS
فى تحليل السلاسل الزمنية

يمكن استخدام البرنامج الأحصائى SPSS فى الحصول على الآتى :

١- اختبار جوهرية النموذج

من جدول Model Summary

إذا كان sig ≤ ٠,٠٥

∴ النموذج المقدر جوهرى احصائيا ويمكن الاعتماد عليه فى التنبؤ.

٢- معرفة شكل العلاقة وقوتها واتجاهها

من رسم شكل الانتشار Curve fit

يمكن معرفة شكل العلاقة هل هى خطية أو من الدرجة الثانية أو معادلة .. وكلما كانت النقط قريبة من الخط المرسوم كانت العلاقة قوية والعكس صحيح

٣- التنبؤ :

من جدول تحرير البيانات (المستنتج)SPSS Data Editor

يمكن التنبؤ سواء بقيمة سنه (أو سنوات) تالية لقيم السلسلة، ويكون التنبؤ لقيمة واحده من عمود (FIT_1) أو بفترة ثقة باحتمال ٩٥% لها حد أدنى وحد أعلى من العمودين [LCL-2 , LCL-1] على التوالى.

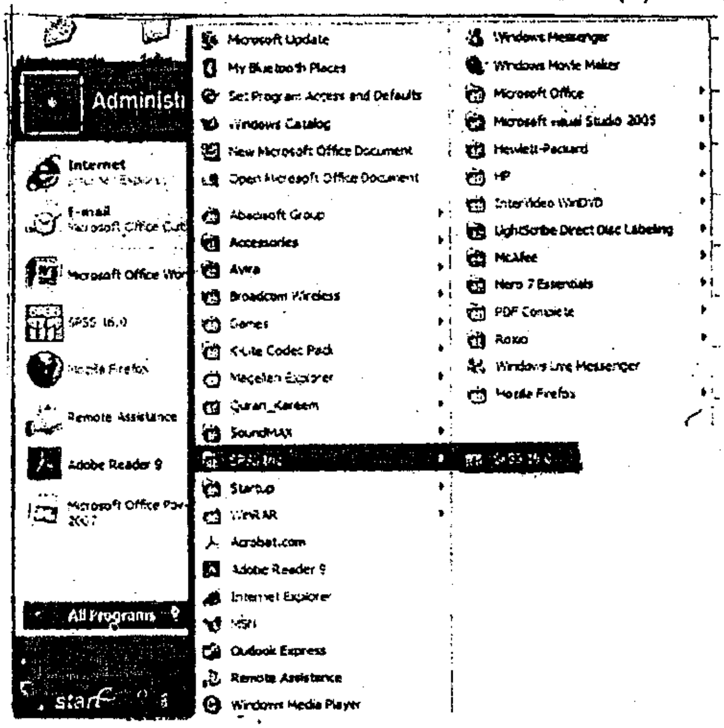
كيفية التعامل مع البرنامج الأحصائى SPSS(*).

سوف يتم التعرف على كيفية التعامل مع برنامج SPSS تفصيليا عن طريقة حل مثال (١) السابق كالآتى:

(*) لابد أن يكون الحاسب المستخدم محمل ببرنامج SPSS.

١- بالنقر على Start ثم الانتقال إلى All program ومنها إلى SPSS Inc ومنها إلى SPSS 16.0

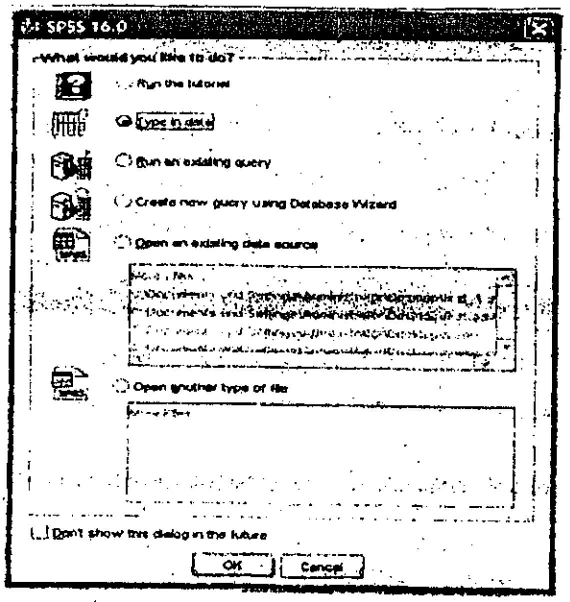
كما يظهر شكل (١) التالى



شكل (١)

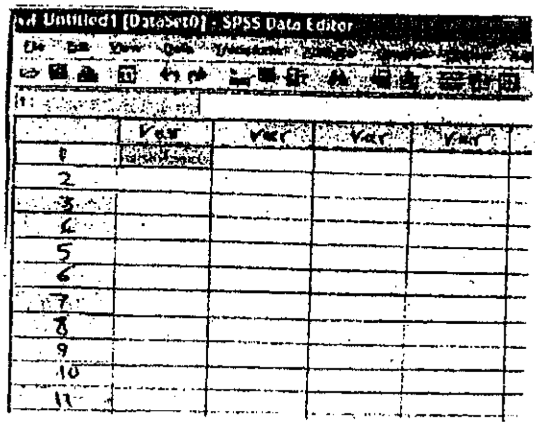
يبين كيفية الدخول إلى برنامج SPSS

٢- بالنقر على SPSS 16.0 فى الشاشة السابقة تظهر شاشة SPSS 16.5 المبينة فى شكل (٢) التالى



شكل (٢) يبين كيفية الدخول إلى صفحة (SPSS)

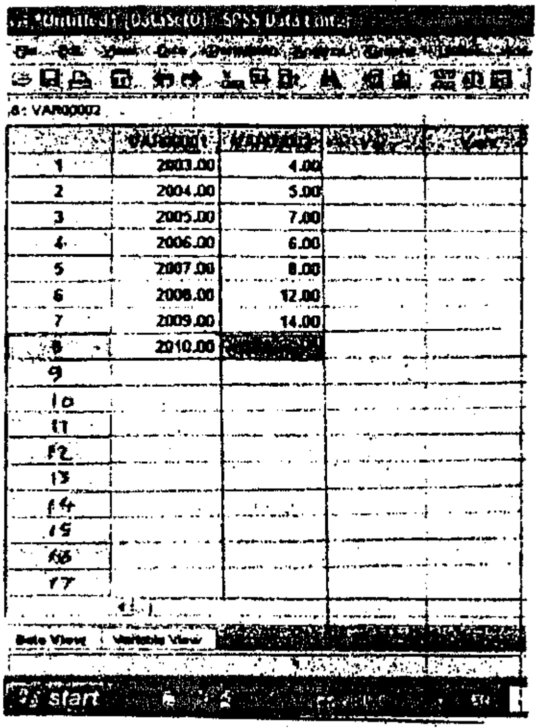
٣- بالتأشير على **Type in data** ← ثم النقر على **OK** فى الشاشة السابقة تظهر صـــفحة SPSS فارغـــة أو نافـــذة (SPSS) أو صفحة محرر البيانات Data Editor كما يظهر فى شكل (٣) التالى



شكل (٣) يبين صفحة (SPSS) فارغة أو نافذة (SPSS)

٤- • يتم ملء العمود الأول بالسنـــوات (٢٠٠٣ : ٢٠٠٩) كمـا ورد فـى مثال (١) السابق وكذلك السنة المراد التنبؤ بها (٢٠١٠)

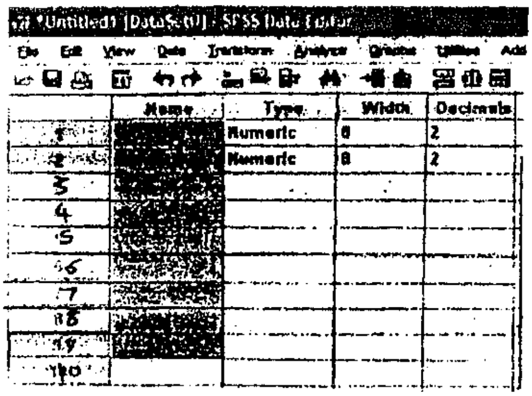
• يتم ملء العمود الثانى بالأرباح (٤ ، ٥ ، ٧ ، ... ، ١٤) كما ورد فى مثـال (١) السابق والشكل رقم (٤) التالى يبين هذه الخطوه .



شكل (٤)

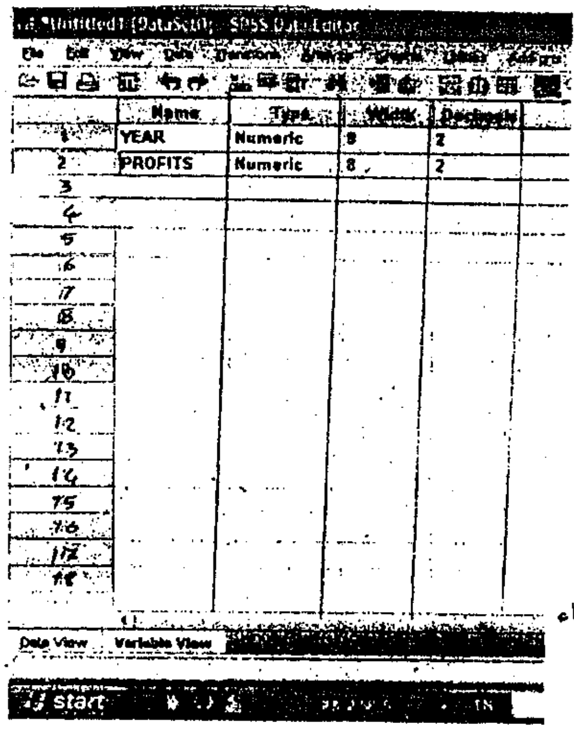
يبين ملء الأعمدة ببيانات مثال (١) السابق

٥- بالنقـــر علـــى $\boxed{\text{Variable view}}$ أسفل الشاشة السابقة تظهر شاشة تعريف وتسمية البيانات كما هو مبين شكل (٥) التالى



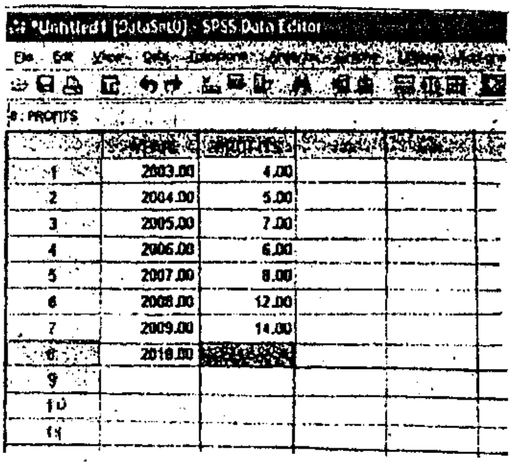
شكل (٥) لتعريف وتسمية المتغيرات

٦- يتم النقر على الخلية (١) الموجودة تحت Name فى الشاشة السابقة ويكتب year علـيها ثم يتم النقر على الخلية (٢) الموجودة تحت Name ويكتب Profit عليها كما هو مبين فى شكل (٦) التالى.



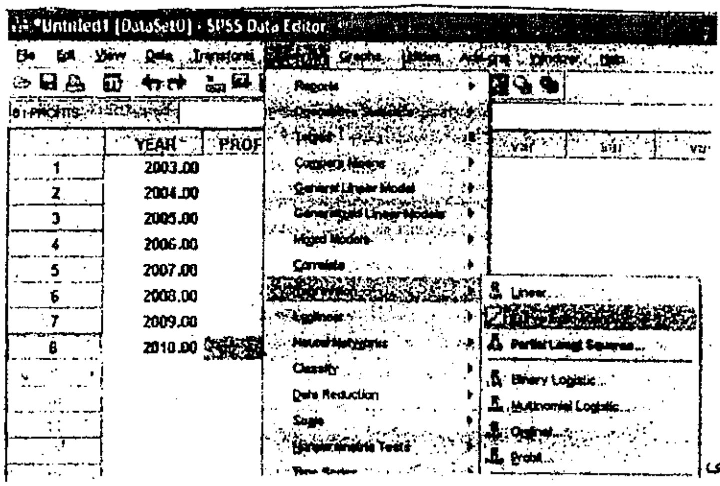
شكل (٦) يبين أسماء المتغيرات

٧- بالنقــر علــى Data View أسفل الشاشة السابقة فى شكل (٦) تظهر شاشة تحرير البيانات السابقة ولكن كل متغير له اسم كما يظهــر فى شكل (٧) التالى.



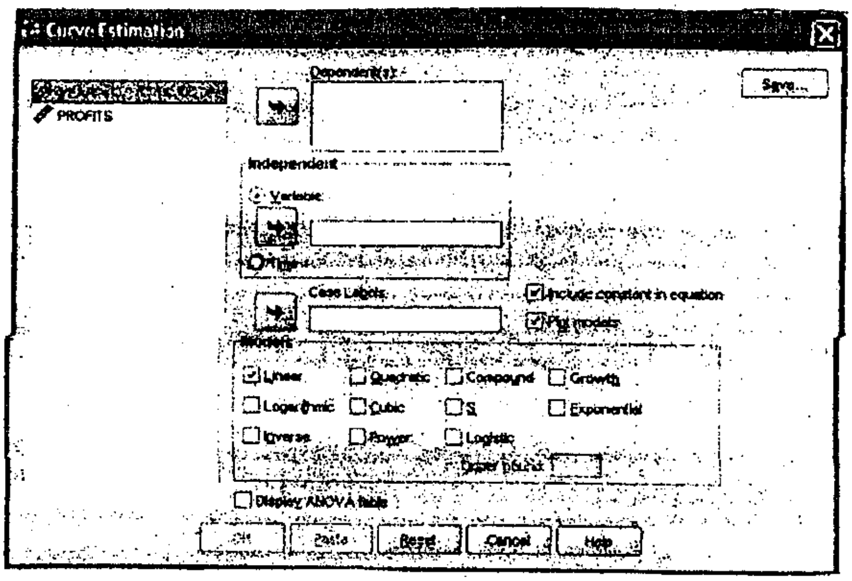
شكل (٧) يوضح البيانات وأسمائها

٨- بالنقــر على القائمة Analyze الموجودة فى شريط القوائم الرئيسية أعلى الــشاشة الــسابقة تظهر قائمة منسدلة، يتم اختيار Regression ومنها يتم اختيار Curve Estimation كما يظهر فى شكل (٨) التالى



شكل (٨) يبين كيفية اختيار التحليل الأحصائى

٩- بالنقـــر علـــى Curve Estimation فـــى الـــشاشة السابقة تظهر الشاشة الموجودة فى شكل (٩) التالى :

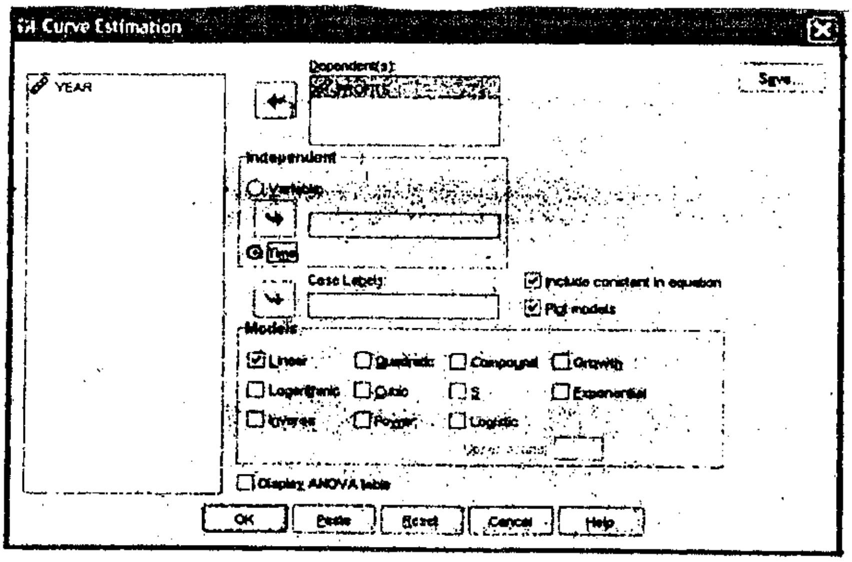


شكل (٩)

يبين نوع التحليل الأحصائى

١٠- يـــتم النقـــر على المتغير Profits الموجود على يسار الشاشة السابقة وينقل بالسهم تحت Dependent فى المستطيل الفارغ.

- يتم التأشير أمام time تصبح الشاشة كما هو مبين في الشكل (١٠) التالى



شكل (١٠)

يبين وضع المتغيرات فى أماكنها

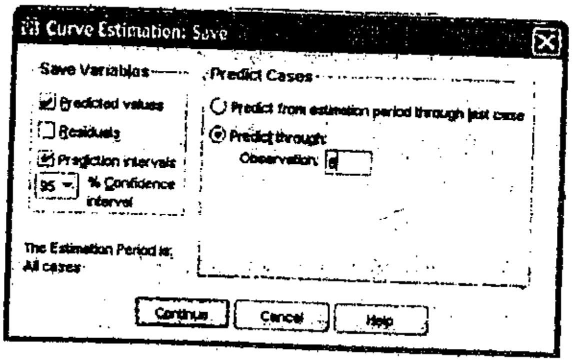
١١- يـتم النقـر علـى Save الموجودة على يسار الشاشة السابقة تظهر شاشـة Curve Estimation Save المبيـنة فـى شكل (١١) التالى، فيم التأشير أمام:

√	Predication Values
√	Prediction intervals

Predict Through

8

ويـتم تنـشيط المربع الموجود اسفل predict through عن طريق النقر عليه ويكتب داخله رقم (8) والذى يبين عدد الفترات الزمنية الموجودة بالتمرين (+) السنة المراد التنبؤ بها كما يظهر فى شكل (١١) التالى.

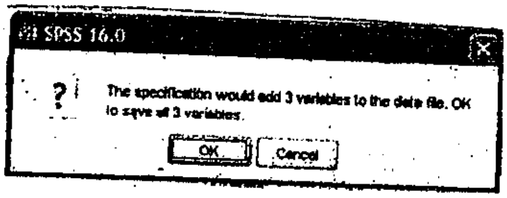


شكل (١١)

يبين التنبؤات المطلوبة

١٢- يتم النقر على Continue الموجودة أسفل الشاشة السابقة

- تظهر الشاشة رقم (١٠) السابقة.
- يتم النقر على OK يظهر مربع حوارى يسأل هل توافق على ظهور (٣) متغيرات جديدة إلى ملف البيانات وهى الخاصة بالتنبؤات المطلوبة كما فى شكل (١٢) التالى.



شكل (١٢)

١٣- يتم النقر على OK فى شكل (١٢) السابق تظهر النتائج التالية:

تحت عنوان **Curve Fit** يظهر:

١- **جـــدول ملخـــص النموذج:** Model Summary كما في شكل (١٣ – أ) التالى:

Model Summary and Parameter Estimates

Dependent Variable:PROFITS

Equation	Model Summary					Parameter Estimates	
	R Square	F	df1	df2	Sig.	Constant	b1
Linear	.882	37.362	1	5	.002	1.571	1.607

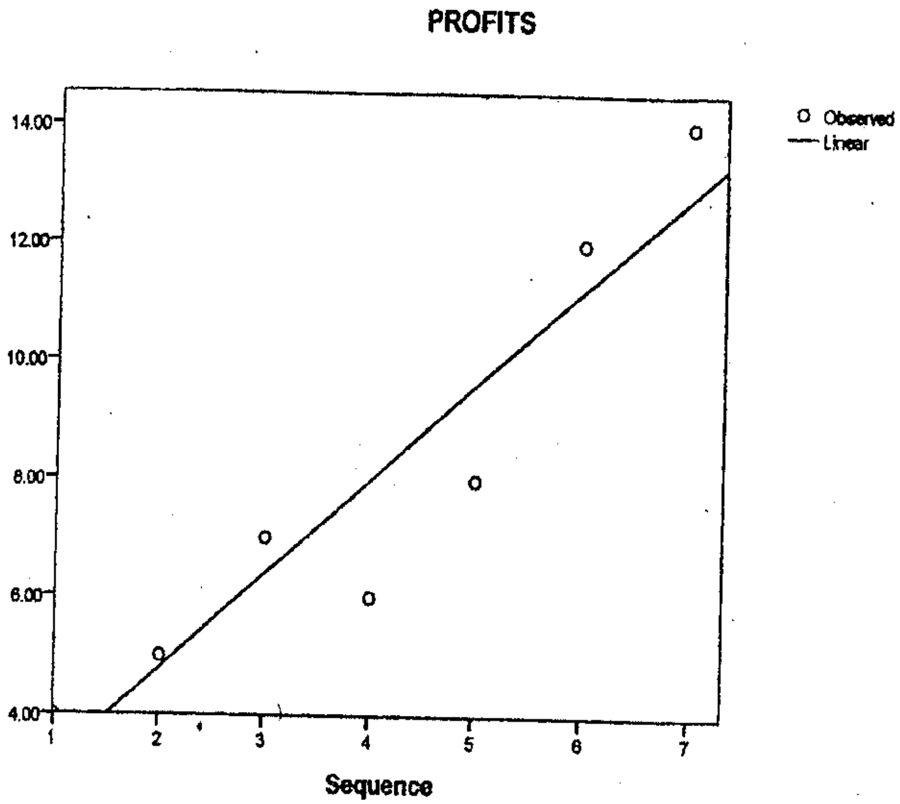
شكل (١٣ – أ)

يلخص النتائج ويوضح مدى جوهرية النموذج

من الجدول السابق: حيث أن Sig. ≤ ٠,٠٥

∴ النموذج المعادلة المقدرة جوهرية إحصائيا ويمكن الاعتماد عليها فى التنبؤ.

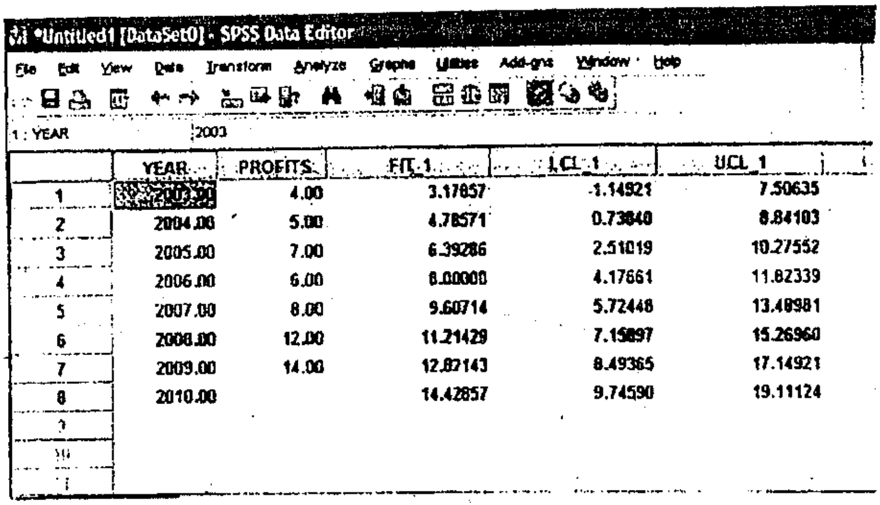
٢- **شكل الانتشار:** Scatter Diagram الموضح فى شكل (١٣ – ب) التالى:



شكل (١٣ – ب)

ويتضح من شكل (١٣ – ب) السابق أن العلاقة خطية – طردية.

ثانياً: بالنقر على علامة التصغير Minimized [-] الموجودة أعلى يمين الشاشة السابقة تظهر شاشة محرر البيانات الأصلية Spss Data Editor مضافاً إليها (٣) أعمدة جديدة كما هو مبين فى شكل (١٣ – جـ) التالى:



	YEAR	PROFITS	FIT_1	LCL_1	UCL_1
1	2003.00	4.00	3.17857	-1.14921	7.50635
2	2004.00	5.00	4.78571	0.73040	8.84103
3	2005.00	7.00	6.39286	2.51019	10.27552
4	2006.00	6.00	8.00000	4.17661	11.82339
5	2007.00	8.00	9.60714	5.72448	13.48981
6	2008.00	12.00	11.21429	7.15897	15.26960
7	2009.00	14.00	12.82143	8.49365	17.14921
8	2010.00		14.42857	9.74590	19.11124

شكل (١٣ – جـ)

يبين القيم المتنبأ بها

يبين الشكل (١٣ – جـ) الآتى:

١- العمود الثالث: تحت عنوان (FIT-1) عبارة عن التنبؤ بقيم السلسلة الزمنية بما فيها عام ٢٠١٠.

∴ $\hat{ص}_{٢٠١٠}$ = ١٤,٤٢٨ وهذا الرقم مطابق تماماً للحل اليدوى للتمرين.

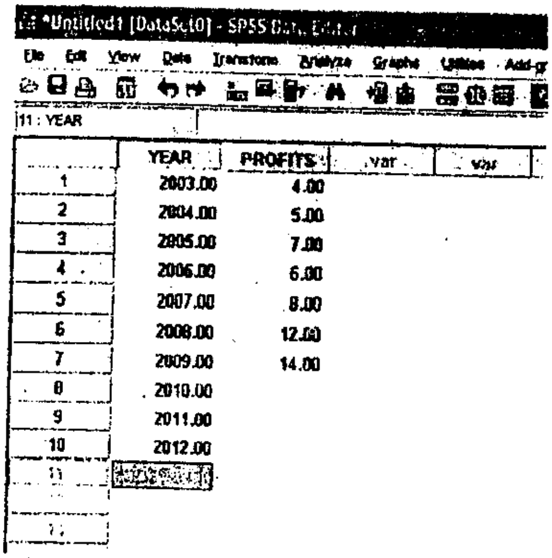
٢- العمود الرابع: تحت عنوان (LCL-1) عبارة عن الحد الأدنى للتنبؤ باحتمال ٩٥% وقيمته عام ٢٠١٠ = ٩,٧٤٥ وهو مطابق تماماً للحل اليدوى.

٣- العمود الخامس: تحت عنوان (UCL-1) عبارة عن الحد الأعلى للتنبؤ باحتمال ٩٥% وقيمته عام ٢٠١٠ = ١٩,١١١ وهو مطابق تماماً للحل اليدوى.

ملاحظة: في التمرين السابق:

إذا كـــان المطلوب التنبؤ بأكثر من سنة قادمة بدلاً من سنة واحدة فمـــثلاً إذا كـــان المطلـــوب التنبؤ بالسنوات ٢٠١٠، ٢٠١١، ٢٠١٢ تتبع نفس الخطوات السابقة تماماً فيما عدا:

أولاً: الخطـوة رقـم (٤) يـتم إضـافة (٢٠١١، ٢٠١٢) تحت العمود (Year) كما هو مبين في شكل (١٤) التالي:



	YEAR	PROFITS	var	var
1	2003.00	4.00		
2	2004.00	5.00		
3	2005.00	7.00		
4	2006.00	6.00		
5	2007.00	8.00		
6	2008.00	12.00		
7	2009.00	14.00		
8	2010.00			
9	2011.00			
10	2012.00			
11				

شكل (١٤)

يبين السنوات المضافة

ثانـــياً: الخطـــوة رقـــم (١١): يتم كتابة الرقم (١٠) بدلاً من الرقم (٨) تحت المـــربع Predict Through لأن السلـــسلة تحتوى على (٧) سنوات، ويراد التنبؤ بـــ (٣) سنوات فيكون الإجمالي هو (١٠) سنوات .... وهكذا.

الطريقة المختصرة لتقدير معالم معادلة خط الاتجاه العام

إذا استطعنا أن نجعل مجموع قيم الزمن (مجـــ س = صفراً)

فإن المعادلتين الطبيعيتين تصبحان كالآتى:

المعادلة الأولى:

مجـــ ص = ن أ + ب مجـــ س

مجـــ ص = ن أ + ب (.)

مجـــ ص = ن أ

ومنها $\boxed{\hat{أ} = \dfrac{\text{مجـ ص}}{ن}}$

المعادلة الثانية:

مجـــ س ص = أ مجـــ س + ب مجـــ $س^2$

مجـــ س ص = أ (٠) + ب مجـــ $س^2$

مجـــ س ص = ب مجـــ $س^2$

ومنها $\boxed{\hat{ب} = \dfrac{\text{مجـ س ص}}{\text{مجـ } س^2}}$

وبالتالـــى فإن الكثير من العمليات الحسابية يتم اختصارها لتقدير معالم معادلة خط الاتجاه العام.

ويمكـــن أن تكون (مجـــ س = صفراً) إذا اعتبرنا أن السنة الوسطى هى سنة الأساس.

وتوضع قيمة (س) أمام السنة الوسطى = صفراً، والقيمة التالية لها تأخذ الأعداد (١، ٢، ٣، ...) وتكون قيمة (س) التى تسبق السنة الوسطى هى (-١، -٢، -٣، .....) هكذا.

السنة	ص	س
.		.
.		.
٢٠٠٠		- ٣
٢٠٠١		- ٢
٢٠٠٢		- ١
٢٠٠٣		صفر
٢٠٠٤		١
٢٠٠٥		٢
٢٠٠٦		٣
.		.
.		.
مجـ		صفر

وتعتبـــر السنة الوسطى (سنة ٢٠٠٣) هى نقطة الأساس وذلك فى حالة مـــا إذا كـــان عد سنوات السلسلة الزمنية عدداً فردياً، أما إذا كان عدد السنوات زوجـــياً فـــإن نقطة الأساس تختار بين السنتين الوسطتين وتأخذ (س) فى السنة الوسطى التالية لنقطة الأساس القيمة (٠,٥) ثم (١,٥) ثم (٢,٥) ... وهكذا

وتأخذ (س) فى السنوات السابقة لنقطة الأساس القيمة (- ٠,٥ ، - ١,٥ ، - ٢,٥ ، ....) هكذا.

السنة	ص	س
١٩٩٢		- ٢,٥
١٩٩٣		- ١,٥
١٩٩٤		- ٠,٥
		صفر
١٩٩٥		٠,٥
١٩٩٦		١,٥
١٩٩٧		٢,٥
مجـ		صفر

وتعتبر نقطة الأساس هي سنة ١٩٩٥/٩٤ أو سنة ٩٤,٥.

مثال (٢):

الآتي يمثل الأرباح السنوية بعشرات الملايين من الجنيهات لإحدى الشركات:

السنة:	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩
الأرباح:	٥	٦	٨	٧	٦	٤٠	٤٢

والمطلوب:

١- تقدير معادلة خط الاتجاه العام بالطريقة المختصرة.

٢- إيجاد مجموع مربعات الخطأ وتباين التقدير والخطأ المعياري للتقدير.

٣- هل النموذج السابق يصلح للتنبؤ إذا علمت أن ت ٠,٠٥،٥ = ٢,٧٥١

٤- تقدير الأرباح المنتظرة في سنة ٢٠١٠، سنة ٢٠١١، ٢٠١٢.

الحـــــل:

يلاحظ أن عدد قيم السلسلة الزمنية ن = ٧ وهو عدداً فردياً.

السنة	ص	س	س ص	$\text{س}^{٢}$	$\text{ص}^{٢}$
٢٠٠٣	٥	٣ -	١٥-	٩	٢٥
٢٠٠٤	٦	٢ -	١٢ -	٤	٣٦
٢٠٠٥	٨	١ -	٨ -	١	٦٤
٢٠٠٦	٧	٠	٠	٠	٤٩
٢٠٠٧	٦	١	٦	١	٣٦
٢٠٠٨	١٠	٢	٢٠	٤	١٠٠
٢٠٠٩	١٢	٣	٣٦	٩	١٤٤
مجـ	٥٤	صفر	٢٧	٢٨	٤٥٤

$$\hat{\text{أ}} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} = \frac{٥٤}{٧} = ٧,٧١٤$$

$$\hat{\text{ب}} = \frac{\text{مجـ س ص}}{\text{مجـ س}^{٢}} = \frac{٥٤}{٧} = ٠,٩٦٤$$

وعليه فإن معادلة خط الاتجاه العام هى:

$$\hat{\text{ص}} = \hat{\text{أ}} + \hat{\text{ب}}\,\text{س}$$

$$\boxed{\hat{\text{ص}} = ٧,٧١٤ + ٠,٩٦٤\,\text{س}}$$

نقطة الأساس هى سنة ٢٠٠٦

و (س) تمثل بُعداً سنوياً.

المطلوب الثانى:

إيجاد مجموع مربعات الخطأ وتباين التقدير والخطأ المعيارى للتقدير:

١- مجموع مربعات الخطأ = مجـ ص^{٢} – أ مجـ ص – ب مجـ س ص

مجـ و^{٢} = ٤٥٤ – ٧,٧١٤ (٥٤) – ٠,٩٦٤ (٢٧)

= ١١,٤١٦

٢- تباين التقدير $\sigma^{٢}$ = $\frac{\text{مجـ و}^{٢}}{\text{ن} - ٢}$ = $\frac{١١,٤١٦}{٥}$ = ٢,٢٨٣

٣- الخطأ المعيارى للتقدير σ = $\sqrt{\sigma}$ = $\sqrt{٢,٢٨٣}$ = ١,٥١

المطلوب الثالث: اختبار جوهرية النموذج:

الخطأ المعيارى ل $\hat{ب}$ ← ع $\hat{ب}$ = $\sqrt{\frac{\sigma^{٢}}{\text{مجـ س}^{٢}}}$ = $\sqrt{\frac{٢,٢٨٣}{٢٨}}$ = ٠,٢٨٦

ت المحسوبة = $\left|\frac{\hat{ب}}{\text{ع}\hat{ب}}\right|$ = $\left|\frac{٠,٩٦٤}{٠,٢٨٦}\right|$ = ٣,٣٧١

∵ ت المحسوبة > ت النظرية.

∴ النموذج يصلح للتنبؤ بمستوى معنوية α = ٥%.

المطلوب الرابع:

١- لتقدير القيمة الاتجاهية لسنة ٢٠١٠:

البعد الزمنى بينة سنة (٢٠١٠) وسنة الأساس (٢٠٠٦)

س = ٢٠١٠ – ٢٠٠٦ = ٤

$\hat{ص}_{٢٠١٠}$ = ٧,٧١٤ + ٠,٩٦٤ (٤) = ١١,٥٧

٢- لتقدير القيمة الاتجاهية لسنة ٢٠١١:

س = ٢٠١١ – ٢٠٠٦ = ٥

∴ $\hat{ص}_{٢٠١١}$ = ٧,٧١٤ + ٠,٩٦٤ (٥) = ١٢,٥٣٤

٣- لتقدير القيمة الاتجاهية لسنة ٢٠١٢:

$\hat{ص}_{٢٠١٢}$ = ٧,٧١٤ + ٠,٩٦٤ (٦) = ١٣,٤٩٨

مثال (٣):

الآتي يمثل متوسط سعر أحد أجهزة الحاسب الآلي بآلاف الجنيهات:

السنة	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩
السعر	١٢	١٠	٨	٩	٦	٧	٥	٤

المطلوب:

١- تقدير معادلة خط الاتجاه العام بالطريقة المختصرة.

٢- إيجـــاد الطريقة الاتجاهية للسعر ٢٠١٠ ، سنة ٢٠١١ ، سنة ٢٠٠٦

إذا علمت أن $ت_{٦ ، ٠,٠٢٥}$ = ٢,٤٤٧

الحـــــل :

يلاحظ أن عدد قيم السلسلة الزمنية (ن) = ٨ عددا زوجيا

السنة	ص	س	س ص	$س^{٢}$	$ص^{٢}$
٢٠٠٢	١٢	-٣,٥	-٤٢	١٢,٢٥	١٤٤
٢٠٠٣	١٠	-٢,٥	-٢٥	٦,٢٥	١٠٠
٢٠٠٤	٨	-١,٥	-١٢	٢,٢٥	٦٤
٢٠٠٥	٩	-٠,٥	-٤,٥	٠,٢٥	٨١
٢٠٠٦	٦	٠,٥	٣	٠,٢٥	٣٦
٢٠٠٧	٧	١,٥	١٠,٥	٢,٢٥	٤٩
٢٠٠٦	٥	٢,٥	١٢,٥	٦,٢٥	٢٥
٢٠٠٩	٤	٣,٥	١٤	١٢,٢٥	١٦
مجـ	٦١	صفراً	-٤٣,٥	٤٢	٥١٥

$$\hat{\text{أ}} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} = \frac{٦١}{٨} = ٧,٦٢٥$$

$$\hat{\text{ب}} = \frac{\text{مجـ س ص}}{\text{مجـ س}^{٢}} = \frac{-٤٣,٥}{٤٢} = -١,٠٣٦$$

وعليه فإن المعادلة المقدرة لخط الاتجاه العام هى

$$\boxed{\hat{\text{ص}} = ٧,٦٢٥ - ١,٠٣٦ \text{ س}}$$

وتعتبر نقطة الأساس هى سنة (٢٠٠٥,٥) أو سنة ٢٠٠٥/٢٠٠٦ و س = سنة واحدة.

المطلوب الثانى :

قبل التنبؤ لابد من اختيار جوهرية النموذج احصائيا هكذا

$$\sigma^{2} = \frac{\text{مجـ و}^{2}}{\text{ن} - ٢} = \frac{\text{مجـ ص}^{2} - \text{أ مجـ ص} - \text{ب مجـ س ص}}{\text{ن} - ٢}$$

$$= \frac{٤{,}٨٠٩}{٦} \quad ٠{,}٨٠٢$$

$$\text{ع}_{\text{ب}} = \sqrt{\frac{\sigma^{2}}{\text{مجـ س}^{2}}} = \sqrt{\frac{٠{,}٨٠٢}{٤٢}} = ٠{,}١٣٨$$

$$\text{ت}_{\text{المحسوبة}} = \left|\frac{\hat{\text{ب}}}{\text{ع}_{\hat{\text{ب}}}}\right| = \left|\frac{١{,}٠٣٦}{٠{,}١٣٨}\right| = ٧{,}٥٠٧$$

∵ ت $_{\text{المحسوبة}}$ > ت $_{\text{النظرية}}$

∴ النموذج جوهرى احصائياً ويصلح للتنبؤ α = ٥%

١- لتقدير القيمة الاتجاهية لسنة ٢٠١٠

البعد الزمنى بين سنة (٢٠١٠) وسنة الأساس (٢٠٠٥,٥)

س = ٢٠١٠ – ٢٠٠٥,٥ = ٤,٥

∴ $\hat{\text{ص}}_{٢٠١٠}$ = ٧,٦٢٥ – ١,٠٣٦ (٤,٥) = ٢,٩٦٣

٢- لتقدير القيمة الاتجاهية لسنة ٢٠١١

س = ٢٠١١ – ٢٠٠٥,٥ = ٥,٥

$\hat{\text{ص}}_{٢٠١١}$ = ٧,٦٢٥ – ١,٠٣٦ (٥,٥) = ١,٩٢٧

= ٧,٦٢٥ + ١,٥٥٤

= ٩,١٧٩

٣- لتقدير القيمة الاتجاهية لسنة ٢٠٠٦

س = ٢٠٠٦ − ٢٠٠٥,٥ = ٠,٥

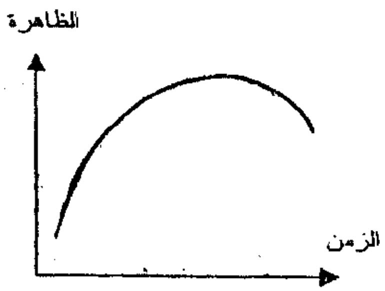
$\hat{ص}_{٢٠٠٦}$ = ٧,٦٢٥ − ١,٣٦ (٠,٥) = ٧,١٠٧

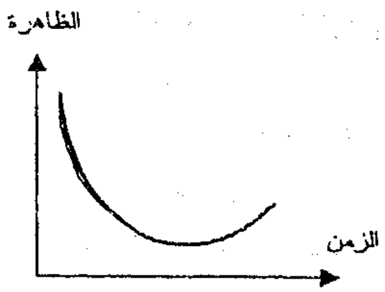
٢ـ الاتجاه العام غير الخطى Non-linear Trend

وسنتناول فى هذا الجزء كل من معادلة الدرجة الثانية معادلة النمو الآسية.

أـ معادلة الدرجة الثانية أو معادلة المنحنى : Quadratic Form

إذا كان شكل الانتشار يشير إلى أن النقط يمكن ان تكون كما فى الشكل رقم (٧) أو الشكل رقم (٨) التاليين، فمن الأفضل فى هذه الحالة تقدير معادلة الاتجاه العام من الدرجة الثانية.





بفرض أن النموذج أو معادلة الدرجة الثانية تأخذ الصورة :

$$\boxed{\hat{ص} = \hat{أ} + \hat{ب}\,س + \hat{جـ}\,س^{٢}}$$

ولتقدير معالم المعادلة (أ̂ ، ب̂ ، حـ̂) تحل الـ (٣) معادلات الطبيعية الآتية معاً.

مجـ ص = ن أ + ب مجـ س + حـ مجـ س^{٢} (١)

مجـ س ص = أ مجـ س + ب مجـ س^{٢} + حـ مجـ س^{٣} (٢)

مجـ س^{٢} ص = أ مجـ س^{٢} + ب مجـ س^{٣} + حـ مجـ س^{٤} (٣)

وحيث أنه فى الطريقة المختصرة يكون كل من :

مجـ س = صفرا

ومجـ س^{٣} = صفرا

فتصبح المعادلة (٢) السابقة كالآتى :

مجـ س ص = أ (٠) + ب مجـ س^{٢} + حـ (٠)

مجـ س ص = ب مجـ س^{٢}

ومنها
$$\boxed{\hat{\text{ب}} = \frac{\text{مجـ س ص}}{\text{مجـ س}^{٢}}} \qquad (٤)$$

وتصبح المعادلة (١) والمعادلة (٣) كالآتى :

مجـ ص = ن أ + حـ مجـ س^{٢} (٥)

مجـ س^{٢} ص = أ مجـ س^{٢} + حـ مجـ س^{٤} (٦)

وعن طريق حل المعادلتين (٥) ، (٦) السابقتين معا يمكن تقدير (أ̂) ، (حـ̂)
ويلاحـظ أن مجمـوع مربعات الخطأ لمعادلة الدرجة الثانية يمكن أن يأتى من العلاقة الآتية :

مجـ و^{٢} = مجـ ص^{٢} − أ مجـ ص − ب مجـ س ص − حـ مجـ س^{٢} ص

ويكن الخطأ المعيارى للتقدير فى هذه الحالة هو :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ و}^{٢}}{\text{ن} - ٣}}$$

مثال (٧) :

الآتى يمثل تطور التكلفة الثابتة للوحدة لأحدى السلع الصناعية خلال الفترة من سنة ٢٠٠٣ إلى سنة ٢٠٠٩ بفرض أن الإنتاج يزيد سنويا بمعدل معين.

السنة	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩
التكلفة	٣	٤	٦	٨	٧	٥	٤

والمطلوب :

١- تقدير معادلة الدرجة الثانية أو معادلة المنحنى وإيجاد مجموع مربعات الخطأ.

٢- تقديـــر معادلة الدرجة الأولى أو معادلة الخط المستقيم وإيجاد مجموع مربعات الخطأ.

٣- إيجـــاد القـــيمة الإتجاهية لسنة ٢٠١٠ من المعادلة الأفضل دون اجراء اختيارات الجوهرية الأحصائية.

الحـــل :

السنة	ص	ص	س ص	$س^{2}$	$س^{2}ص$	$س^{4}$	$ص^{2}$
٢٠٠٣	٣	-٣	-٩	٩	٢٧	٨١	٩
٢٠٠٤	٤	-٢	-٨	٤	١٦	١٦	١٦
٢٠٠٥	٦	-١	-٦	١	٦	١	٣٦
٢٠٠٦	٨	٠	٠	٠	٠	٠	٦٤
٢٠٠٧	٧	١	٧	١	٧	١	٤٩
٢٠٠٨	٥	٢	١٠	٤	٢٠	١٦	٢٥
٢٠٠٩	٤	٣	١٢	٩	٣٦	٨١	١٦
مجـــ	٣٧	٠	٦	٢٨	١١٢	١٩٦	٢١٥

أولا : تقدير معادلة الدرجة الثانية :

$$\hat{ب} = \frac{مجـ\ س\ ص}{مجـ\ س^{2}} = \frac{٦}{٢٨} = \boxed{٠,٢١٤}$$

لايجاد ($\hat{أ}$ ، $\hat{جـ}$) نحل المعادلتين الآتيتين معا :

مجـ ص = ن أ + جـ مجـ $س^٢$

مجـ $س^٢$ ص = أ مجـ $س^٢$ + جـ مجـ $س^٤$

٣٧ = ٧ أ + ٢٨ جـ (١)

١١٢ = ٢٨ أ + ١٩٦ جـ (٢)

بضرب المعادلة (١) × ٤ ١٤٨ = ٢٨ أ + ١١٢ جـ (٣)

بطرح المعادلة (٢) من المعادلة (٣) ينتج أن :

٣٦ = − ٨٤ جـ

$$\hat{جـ} = \frac{٣٦}{-٨٤} = \boxed{-٠,٤٢٨٥٧}$$

بالتعويض فى المعادلة (١) عن جـ = − ٠,٤٢٨٥٧ ينتج أن :

٣٧ = ٧ أ + ٢٨ (−٠,٤٢٨٥٧)

٣٧ = ٧ أ − ١٢

٣٧ + ١٢ = ٧ أ

٤٩ = ٧ أ

$$\therefore أ = \frac{٤٩}{٧} = \boxed{٧}$$

∴ معادلة الدرجة الثانية أو معادلة المنحنى هى :

$$\boxed{\hat{ص} = ٧ + ٠,٢١٤ \text{ س} - ٠,٤٢٨٥٧ \text{ س}^٢}$$

نقطة الأساس هى سنة ٢٠٠٦

س = بُعداً سنوياً

مجموع مربعات الخطأ :

$$\text{مجـ و}^2 = \text{مجـ ص}^2 - \text{أ مجـ ص} - \text{ب مجـ س ص} - \text{جـ مجـ س}^2\text{ ص}$$

$$= ٢١٥ - ٧ \ (٣٧) - ٠,٢١٤ \ (٦) - (-٠,٤٢٨٥٧) \ (١١٢)$$

$$= ٢,٧١٦$$

ملاحظة : الخطأ المعيارى لمعادلة الدرجة الثانية :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ و}^2}{\text{ن} - ٣}}$$

$$= \sqrt{\frac{٢,٧١٦}{٧ - ٣}} = ٠,٨٢٤$$

ثانياً : تقدير معادلة الدرجة الأولى :

$$\hat{\text{أ}} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} = \frac{٣٧}{٧} = ٥,٢٨٦$$

$$\hat{\text{ب}} = \frac{\text{مجـ س ص}}{\text{مجـ س}^2} = \frac{٦}{٢٨} = ٠,٢١٤$$

∴ معادلة الدرجة الأولى $\hat{\text{ص}} = \hat{\text{أ}} + \hat{\text{ب}}$ س

$$\boxed{\hat{\text{ص}} = ٥,٢٨٦ + ٠,٢١٤ \text{ س}}$$

نقطة الأساس هى سنة ٢٠٠٦

س = بُعداً سنوياً

مجموع مربعات الخطأ :

مجـــ $و^٢$ = مجـــ $ص^٢$ – أ مجـــ ص – ب مجـــ س ص

= ٢١٥ – ٥,٢٨٦ (٣٧) – ٢١٤ (٦)

= ١٨,١٣٤

الخطأ المعيارى للتقدير :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ و}^{٢}}{\text{ن} - ٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{١٨,١٣٤}{٧ - ٢}} = \sqrt{\frac{١٨,١٣٤}{٥}} = \boxed{١,٩٠٤}$$

وتعتبر معادلة الدرجة الثانية أفضل لأن مجموع مربعات اخطائها أقل.

مـــن ثـــم فمن الأفضل التنبؤ بالقيمة الإتجاهية لسنة ٢٠١٠ من معادلة الدرجة الثانية.

ثالثاً : لإيجاد القيمة الإتجاهية لسنة ٢٠١٠

س = ٢٠١٠ – سنة الأساس = ٢٠١٠ – ٢٠٠٦ = ٤

$$\boxed{\hat{\text{ص}} = ٧ + ٠,٢١٤ \text{ س} - ٠,٤٢٨٥٧ \text{ س}^{٢}}$$

$$\hat{\text{ص}} = ٧ + ٠,٢١٤ (٤) - ٠,٤٢٨٥٧ (٤)^{٢} = \boxed{١}$$

استخدام البرنامج الاحصائى (SPSS) فى حل مثال (٧) السابق :

لتقديـر معادلـة الدرجـة الأولـى (linear) وكـذلك معادلـة الدرجة الثانية Quadratic باسـتخدام البرنامج الأحصائى SPSS تتبع الخطوات السابقة فى حل المثال (١) باستخدام الحاسب تماماً مع ملاحظة الآتى :

١- فى الخطوة رقم (٩) يتم التأشير أمام | Quadratic | √ |

مع ملاحظة أن هناك علامة دائمة أمام | Linear | √ | يمكـن ازالـتها بالنقر عليها

النتائـج :

أولا : تحت عنوان **Curve Fit** يظهر الآتى

(١) جدول Model Summary كما فى شكل (١٥ – أ) التالى

Model Summary and Parameter Estimates

Dependent Variable:cost

Equation	Model Summary					Parameter Estimates		
	R Square	F	df1	df2	Sig.	Constant	b1	b2
Linear	.066	.354	1	5	.578	4.429	.214	
Quadratic	.860	12.316	2	4	.020	-.714	3.643	-.429

شكل رقم (١٥ – أ)

يبين ملخص نتائج الدالة الخطية ودالة الدرجة الثانية

يتضح من الجدول السابق الآتى :

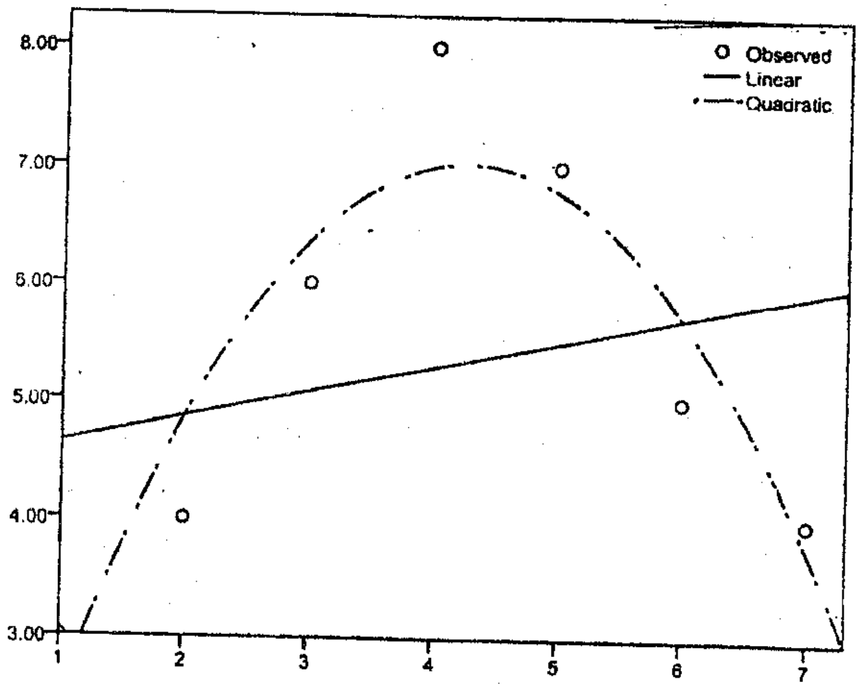
١- **المعادلة الخطية linear** : غير جوهرية احصائيا ولا يمكن الاعتماد عليها فى التنبؤ وذلك لأن (sig > ٠,٠٥) فلابد من استبعادها.

٢- معادلـــة الدرجة الثانية Quadratic : معادلة جوهرية احصائياً ويمكن الاعتماد عليها فى التنبؤ وذلك لأن (sig < ٠,٠٥)

ملاحظة : إذا كان كل من المعادلتين جوهرية احصائيا (sig < ٠,٠٥)

∴ يــتم المفاضلة بينهما على أساس أن المعادلة التى لها أكبر R square هى الأفضل

(٢) شكل الانتشار :



شكل (١٥ – ب)

يبين أن دالة الدرجة الثانية هى الأفضل

ثانياً : جدول نتائج محرر البيانات (SPSS Data Editor) رقم (١٥ – حـ) التالى

*Untitled1 [DataSet0] - SPSS Data Editor

File Edit View Data Transform Analyze Graphs Utilities Add-ons Window Help

13 : LCL_2 Visible: 8

	YEAR	cost	FIT_1	LCL_1	UCL_1	FIT_2	LCL_2	UCL_2
1	2003.00	3.00	4.64286	-1.28247	10.56818	2.50000	-0.53583	5.53583
2	2004.00	4.00	4.85714	-0.69514	10.40942	4.85714	2.26380	7.45048
3	2005.00	6.00	5.07143	-0.24448	10.38733	6.35714	3.76380	8.95048
4	2006.00	8.00	5.28571	0.05097	10.52046	7.00000	4.35907	9.64093
5	2007.00	7.00	5.50000	0.18409	10.81591	6.78571	4.19238	9.37905
6	2008.00	5.00	5.71429	0.16200	11.26657	5.71429	3.12095	8.30762
7	2009.00	4.00	5.92857	0.00325	11.85390	3.78571	0.74988	6.82155
8	2010.00	.	6.14286	-0.26837	12.55408	1.00000	-3.23490	5.23490
9	.	.	.	.	.	.	.	.
10	.	.	.	.	.	.	.	

شكل (١٥ – حـ)

يبين التنبؤات باستخدام الدالة الخطية ودالة الدرجة الثانية

يتضح من جدول (١٥ – حـ) السابق الآتى :

١– يتم استبعاد الأعمدة ٣ ، ٤ ، ٥ لأنها خاصة بالدالة الخطية (غير الجوهرية احصائيا).

٢– العمود رقم (٦) : (Fit – 2) عبارة عن التنبؤات بدالة الدرجة الثانية ويبين أن القيمة الاتجاهية للمبيعات سنه ٢٠١٠ = ١

$\therefore \hat{ص}_{٢٠١٠} = ١$

وهى نفس النتيجة التى تم التوصل اليها بالحل اليدوى

٣– العمود رقم (٧) : (LCL – 2) عبارة عن الحد الأدنى لفترة الثقة.

٤– العمود رقم (٨) : (UCL – 2) عبارة عن الحد الأعلى لفترة الثقة.

ب- معادلة النمو (الآسية) **Growth Function** :

يفـضل اسـتخدامها للتعبير عن الظواهر التى تتزايد ببطء ثم تنطلق فى الزيادة الـسريعة بعـد ذلـك أى أنها تتزايد بصفة مستمرة مثال ذلك الاشتراكات فى الأنتـرنت وكذلك التليفون المحمول والكميات المباعة من معظم السلع الغذائية ويمكن أن تكون على الصورة الآتية :

والشكل الجبرى لها ص = أ × ث ^س^ (١)

ويأخذ لوغاريتم الطرفين تصبح المعادلة على الصورة الآتية :

لو صْ = لو أ̂ + س لو بْ (٢)

ويمكن تقدير (لو أ̂) ولو بْ عن طريق حل المعادلتين الطبيعيتين الآتيتين معا :

مجـ لو ص = ن لو أ + لو ب مجـ س (٣)

مجـ (س لو ص) = لو أ مجـ س + لو ب مجـ س^{٢} (٤)

وحيث أنه فى الطريقة المختصرة يكون (مجـ س = صفرا) فأن :

١- المعادلة (٣) تصبح مجـ لو ص = ن لو أ

ومنها لو أ̂ = $\boxed{\dfrac{\text{مجـ لو ص}}{\text{ن}}}$ (٥)

٢- من المعادلة (٤) مجـ (س لو ص) = لو ب مجـ $س^{٢}$

$$\boxed{\text{ومنها لو } \hat{ب} = \frac{\text{مجـ (س لو ص)}}{\text{مجـ } س^{٢}}} \qquad (٦)$$

مثال (١٢) :

السنة	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩
المبيعات	١٠	١٣	١٦	٢٠	٢٥	٣٢	٤٠

المطلوب :

١- رسم شكل الإنتشار ومنه تبين نوع العلاقة المقترحة.

٢- تقدير معادلة النمو (الآسية) وإيجاد مجموع مربعات الخطأ.

٣- تقدير معادلة خط الأتجاه العام وإيجاد مجموع مربعات الخطأ.

٤- إيجاد القيمة الاتجاهية لسنه ٢٠٠١ من المعادلة الأفضل.

الحـــل :

السنة	ص	س	لو ص	س لو ص	$س^{٢}$	$ص^{٢}$	س ص	$لو ص^{٢}$
٢٠٠٣	١٠	-٣	١,٠٠٠	-٣	٩	١٠٠	-٣٠	٢
٢٠٠٤	١٣	-٢	١,١١٣٩	٢,٢٢٨٧	٤	١٦٩	-٢٦	٢,٢٢٨
٢٠٠٥	١٦	-١	١,٢٠٤١	١,٢٠٤١	١	٢٥٦	-١٦	٢,٤٠٨
٢٠٠٦	٢٠	٠	١,٣٠١	٠	٠	٤٠٠	٠	٢,٦٠٢
٢٠٠٧	٢٥	١	١,٣٩٧٩	١,٣٩٧٩	١	٦٢٥	٢٥	٢,٧٩٦
٢٠٠٨	٣٢	٢	١,٥٠٥١	٣,٠١٠٢	٤	١٠٢٤	٦٤	٣,٠١
٢٠٠٩	٤٠	٣	١,٦٠٢١	٤,٨٠٦٣	٩	١٦٠٠	١٢٠	٣,٢٠٤
مجـ	١٥٦	٠	٩,١٢٤١	٢,٧٨٢٥	٢٨	٤١٧٤	١٣٧	١٨,٢٤٨

ملاحظات :

لايجاد لو (١٠) ⟵ $\boxed{\text{log}}$ $\boxed{١٠}$ = ⟵ ١

لايجاد لو (١٦) ⟵ $\boxed{\text{log}}$ $\boxed{١٦}$ = ⟵ ١,١١٣٩

لايجاد لو (١٣) ⟵ $\boxed{\text{log}}$ $\boxed{١٣}$ = ⟵ ١,٢٠٤١

وهكذا

$$\text{لو } \hat{\text{أ}} = \frac{\text{مجـ لو ص}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{٩,١٢٤١}{٧} = ١,٣٠٣٤٤$$

$$\text{لو } \hat{\text{ب}} = \frac{\text{مجـ (س لو ص)}}{\text{مجـ س}^{٢}}$$

$$= \frac{٢,٧٨٢٥}{٢٨} = ٠,٠٩٩٤$$

∴ معادلة النمو الآسية :

$$\text{لو } \hat{\text{ص}} = \text{لو } \hat{\text{أ}} + \text{س لو } \hat{\text{ب}}$$

$$\boxed{\text{لو } \hat{\text{ص}} = ١,٣٠٣٤٤ + ٠,٠٩٩٤ \text{ س}}$$

نقطة الأساس هى سنه ٢٠٠٦، س = سنة

لايجاد مجموع مربعات الخطأ (مجـ و^{2})

السنة	ص	س	لو $\hat{ص}$ = ١,٣٠٣٤٤ + ٠,٠٩٩٤ س	$\hat{ص}$	و = ص − $\hat{ص}$	و^{2}
٢٠٠٣	١٠	٣-	١,٠٠٥٢٤	١٠,١٢١٣	٠,١٢١٣	٠,٠١٤٧
٢٠٠٤	١٣	٢-	١,١٠٤٦٤	١٢,٧٢٤٥	٠,٢٧٥٥	٠,٠٧٥٩
٢٠٠٥	١٦	١-	١,٢٠٤٠	١٥,٩٩٧١	٠,٠٠٢٩	٠,٠٠٠
٢٠٠٦	٢٠	٠	١,٣٠٣٤٤	٢٠,١١١٣	٠,١١١٣ -	٠,٠٩٦٨
٢٠٠٧	٢٥	١	١,٤٠٢٨	٢٥,٢٨٣٤	٠,٢٨٣٤-	٠,٠٨٠٣
٢٠٠٨	٣٢	٢	١,٥٠٢٢	٣١,٧٨٦٣	٠,٢١٣٧	٠,٠٤٥٦٧
٢٠٠٩	٤٠	٣	١,٦٠١٦	٣٩,٩٦١٣	٠,٠٣٨٧	٠,٠٠١٥
مجـ	١٥٦	٠				٠,٣١٤٨٧

∴ مجـ و^{2} = ٠,٣١٤٨٧

المطلوب الثانى : تقدير معادلة الدرجة الأولى وخطائها المعيارى

$$\hat{\text{أ}} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} = \frac{١٥٦}{٧} = ٢٢,٢٨٦$$

$$\hat{\text{ب}} = \frac{\text{مجـ س ص}}{\text{مجـ س}^{2}} = \frac{١٣٧}{٢٨} = ٤,٨٩٢٩$$

∴ معادلة الدرجة الأولى هى : $\hat{ص} = \hat{أ} + \hat{ب}س$

$\boxed{\hat{ص} = ٢٢,٢٨٦ + ٤,٨٩٢٩ \text{ س}}$

نقطة الأساس هى سنة ٢٠٠٦

س = سنة

لايجاد الخطأ المعيارى :

١- مجموع مربعات الخطأ

مجـ و^{٢} = مجـ ص^{٢} – أ مجـ ص – ب مجـ س ص

= ٤١٧٤ – ٢٢,٢٨٦ (١٥٦) – ٤,٨٩٢٩ (١٣٧)

= ٢٧,٠٥٦٧

وحيث أن (مجـ و^{٢}) لمعادلة النمو الآسية أصغر من (مجـ و^{٢}) للمعادلة الخطية

∴ معادلة النمو الآسية أفضل ويمكن الاعتماد عليها فى التنبؤ لسنة ٢٠١١

المطلوب الثالث : القيمة الاتجاهية لسنة ٢٠١١

س = ٢٠١١ – سنة الأساس = ٢٠١١ – ٢٠٠٦ = ٥

لو $\hat{ص}$ = ١,٣٠٣٤٤ + ٠,٠٩٤٤ س

لو $\hat{ص}_{٢٠١١}$ = ١,٣٠٣٤٤ + ٠,٠٩٩٤ (٥) = ١,٨٠٠٤٤

∴ $\hat{ص}_{٢٠١١}$ = العدد المقابل لـ ١,٨٠٠٤٤ = ٦٣,١٦

ملاحظة : لإيجاد العدد المقابل لـ ١,٨٠٠٤٤ يتبع الآتى :

$\boxed{\text{Shift}} \rightarrow \boxed{\text{log}} \rightarrow \boxed{١,٨٠٠٤٤} = \longrightarrow ٦٣,١٦$

استخدام البرنامج الاحصائى (SPSS) فى حل مثال (١٢) السابق :

لتقدير معادلة الدرجة الأولى (Linear) وكذلك معادلة النمو الأسية (Growth)

تتبع الخطوات السابقة فى حل المثال (١) باستخدام الحاسب تماما مع ملاحظة الآتى :

١- فى الخطوة رقم (٤) يكون عمود السنوات (year) من سنه ٢٠٠٣ إلى سنه ٢٠١١

٢- فى الخطوة رقم (٩) يتم التأشير أمام Growth √

مع ملاحظة أن هناك علامة دائمة أمام Linear √

٣- فى الخطوة رقم (١١) يتم كتابة (٩) فى المربع أمام Predict through

النتائج:

أولا : تحت عنوان **Curve Fit** يظهر الآتى :

١- جدول Model Summary لكن شكلا (١٦ – أ) التالى

Model Summary and Parameter Estimates

Dependent Variable:SALES

Equation	Model Summary					Parameter Estimates	
	R Square	F	df1	df2	Sig.	Constant	b1
Linear	.961	123.643	1	5	.000	2.714	4.893
Growth	.999	9.068E3	1	5	.000	2.086	.229

شكل (١٦ – أ)

يتضح من الجدول السابق أن:

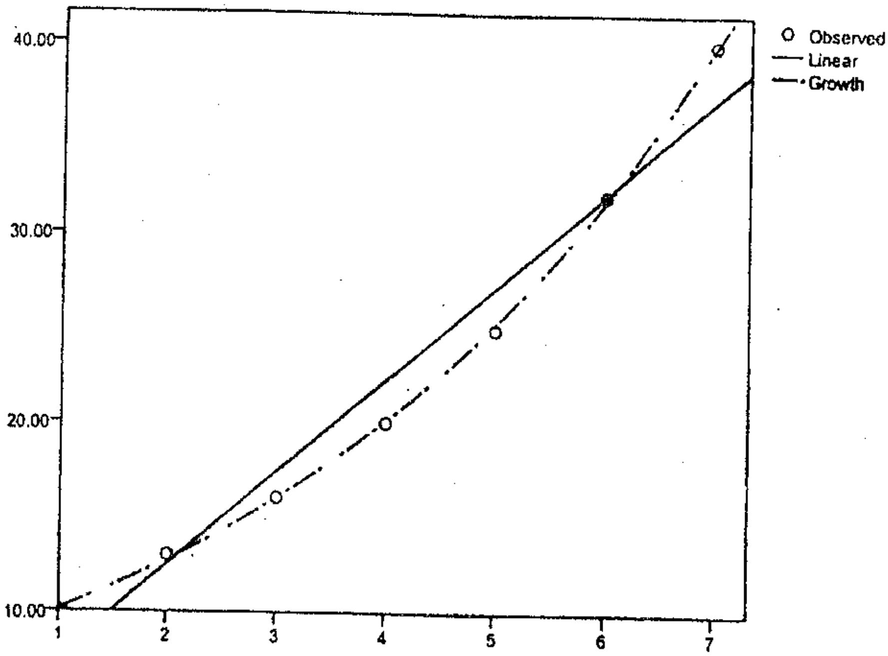
كلتا المعادلتين جوهرية احصائيا لان قيمة (sig) فى كل منهما < ٠,٠٥

∴ يتم المفاضلة بينما على أساس أكبر R square

وحيث أن R square فى معادلة النمو الآسية هى الأكبر

∴ تعتبر معادلة النمو الآسية هى الأفضل ويتم التنبؤ من خلالها وتستبعد المعادلة الخطية.

٢- شكل الانتشار :



شكل (١٦ – ب)

يبين أن دالة النمو الآسية هى الأفضل

ثانياً : من جدول نتائج محرر البيانات (SPSS Data Editor) رقم (١٦ – جـ) الآتى :

	YEAR	SALES	FIT_1	LCL_1	UCL_1	FIT_2	LCL_2	UCL_2
1	2003.00	10.00	7.60714	0.36443	14.84985	10.12389	9.73131	10.53231
2	2004.00	13.00	12.50000	5.71327	19.28673	12.72681	12.26...	13.20731
3	2005.00	16.00	17.39286	10.89506	23.89066	15.99895	15.44...	16.57681
4	2006.00	20.00	22.28571	15.88712	28.68430	20.11237	19.42...	20.82753
5	2007.00	25.00	27.17857	20.68077	33.67637	25.28339	24.40...	26.19660
6	2008.00	32.00	32.07143	25.28470	38.85816	31.78390	30.62...	32.98390
7	2009.00	40.00	36.96429	29.72157	44.20700	39.95573	38.40...	41.56763
8	2010.00		41.85714	34.02050	49.69378	50.22858	48.12...	52.42466
9	2011.00		46.75000	38.21022	55.28978	63.14266	60.26...	66.15689

شكل (١٦ – جـ)

يبين التنبؤات باستخدام الدالة الخطية وكذلك دالة النمو الأسية

ويتبين من الجدول السابق الآتى :

١- يتم استبعاد الأعمدة رقم ٣ ، ٤ ، ٥ لانها خاصة بالدالة الخطية (غير المفضلة)

٢- العمود رقم (٦) : (FIT –2) خاص بالتنبؤ بدالة النمو الأسية ويبين أن **القيمة الاتجاهية للمبيعات فى سنه ٢٠١١ هى ٦٣,١٤٢**

$\therefore$ $\hat{ص}_{٢٠١١}$ = ٦٣,١٤٢

وهو رقم مطابق تماماً لنتيجة الحل اليدوى

٣- العمود (٧) : (LCL – 2) عبارة عن الحد الأدنى لفترة الثقة = ٦٠,٢٦

٤- العمود (٨) : (UCL – 2) عبارة عن الحد الأعلى لفترة الثقة = ٦٦,١٥٦

ثانياً : التغيرات الموسمية

Seasonal Variations

هى التقلبات التى تحدث سنوياً فى المبيعات والأسعار وغيرها من المتغيرات الإقتصادية، نتيجة المواسم والأعياد والفصول المناخية.

وسنتناول التغيرات الموسمية من خلال دراسة أثر هذه المواسم وإيجاد القيمة التنبوية للظاهرة.

أولاً : دراسة أثر التغيرات الموسمية :

سوف نتناول طريقتان لدراسة أثر التغيرات الموسمية هما الطريقة الأولية أو البسيطة وطريقة نسبة القيمة الفعلية الى القيمة الاتجاهية.

١- الطريقة الأولية

لمعرفة أثر أى موسم على الظاهرة الإقتصادية محل القياس يتم إيجاد متوسط قيمة الظاهرة فى هذا الموسم الى المتوسط العام.

فمثلاً : * الرقم القياسى الموسمى او الدليل الموسمى لأى ربع سنة.

$$= \frac{\text{متوسط هذا الربع}}{\text{المتوسط العام}} \times ١٠٠$$

* الرقم القياس الموسمى أو الدليل الموسمى لأى شهر فى السنة.

$$= \frac{\text{متوسط هذا الشهر}}{\text{المتوسط العام}} \times ١٠٠$$

ويلاحظ أن الأدلة الموسمية لابد أن يكون مجموعها مساوياً لعدد المواسم خلال السنة ×١٠٠ فإذا كانت التقلبات فى الظاهرة تحدث كل ربع سنة أو ٤ مرات فى السنة مثلاً فلابد أن يكون مجموع الأقام القياسية الموسمية فى هذه الحالة = ١٠٠ × ٤ = ٤٠٠، وإذا كانت التقلبات تحدث شهرياً فإن مجموع الأدلة الموسمية لابد أن =١٢٠٠ وهكذا، وفى حالة ما إذا كان مجموع الادلة الموسمية ≠ ٤٠٠ إذا كانت التقلبات الموسمية ربع سنوية مثلاً.

فإنه : يتم ضرب كل دليل موسمى × $\frac{٤٠٠}{\text{مجموع الأدلة الموسمية}}$

مثال : (١٤) : اليك المبيعات الربع سنوية خلال السنوات من سنة ١٩٩٦ الى سنة ١٩٩٨.

الربع / السنة	الأول	الثانى	الثالث	الرابع	المجموع
١٩٩٦	٢٢	٢٣	٣٤	٢٥	١٠٤
١٩٩٧	٢٦	٢٩	٤٥	٣٣	١٣٣
١٩٩٨	٣٠	٣٥	٦٥	٣٥	١٦٥
المجموع	٧٨	٨٧	١٤٤	٩٣	٤٠٢

والمطلوب :

إيجاد الأرقام القياسية الموسمية لكل ربع سنة أو بيان أثر التغيرات الموسمية.

الحل :

أولاً : إيجاد متوسط كل $\frac{١}{٤}$ سنة :

متوسط الربع الاول $\bar{س}_١ = \frac{٧٨}{٣} =$ ٢٦

متوسط الربع الثانى $\bar{س}_٢ = \frac{٨٧}{٣} =$ ٢٩

متوسط الربع الثالث $\bar{س}_٣ = \frac{١٤٤}{٣} =$ ٤٨

متوسط الربع الرابع $\bar{س}_٤ = \frac{٩٣}{٣} =$ ٣١

ثانياً : إيجاد المتوسط العام :

$$= \frac{\text{مجموع المتوسطات}}{\text{عددها}}$$

$$\bar{س} = \frac{٢٦ + ٢٩ + ٤٨ + ٣١}{٤} = \frac{١٣٤}{٤} = \boxed{٣٣,٥}$$

ثالثاً : إيجاد الرقم القياسى الموسمى لأى ربع سنة :

$$\frac{\text{متوسط الربع}}{\text{المتوسط العام}} \times ١٠٠$$

١- الرقم القياسى الموسمى للربع الأول = $\frac{٢٦}{٣٣,٥} \times ١٠٠$ = ٧٧,٦٪

ومعنى ذلك أن المبيعات فى الربع الأول منخفضة بنسبة = ١٠٠٪ - ٧٧,٦٪ = ٢٢,٤٪.

٢- الرقم القياسى الموسمى للربع الثانى = $\frac{٢٩}{٣٣,٥} \times ١٠٠$ = ٨٦,٦٪

٣- الرقم القياسى الموسمى للربع الثالث = $\frac{٤٨}{٣٣,٥} \times ١٠٠$ = ١٤٣,٣٪

ومعنى ذلك أن المبيعات مرتفعة فى الربع الثالث بنسبة ٤٣,٣٪.

٤- الرقم القياسى الموسمى للربع الرابع = $\frac{٣١}{٣٣,٥} \times ١٠٠$ = ٩٢,٥٪

- ويلاحظ أن مجموع الأرقام القياسية الموسمية أو الادلة الموسمية.

= ٧٧,٦٪ + ٨٦,٦٪ + ١٤٣,٣٪ + ٩٢,٥٪ = ٤٠٠٪

وبالتالى يمكن إعتبار الأرقام السابقة ممثلة للتغيرات الموسمية ولاداعى لتعديلها.

- ويلاحظ أن الطريقة السابقة غير دقيقة لكنها تتسم بالبساطة والسهولة وهناك العديد من الطرق الأكثر دقة لإيجاد الأرقام القياسية الموسمية أو الادلة الموسمية والتي ستعرض منها طريقة نسبة القيم الفعلية الى القيم الاتجاهية.

٢- طريقة نسبة القيم الفعلية الى القيم الاتجاهية

الرقم القياسى الموسمى أو الدليل الموسمى طبقاً لهذه الطريقة ينتج من ايجاد متوسط نسب القيم الفعلية او الحقيقية الى القيم الاتجاهية الناتجة من تقديرات معادلة خط الاتجاه العام.

ويمكن إتباع الخطوات الأتية :

١- تقدير معادلة خط الاتجاه العام.

٢- ايجاد القيمة الاتجاهية بالنسبة للفترة الأولى من السلسلة الزمنية.

٣- تنشئ عمود للقيم الاتجاهية (صً) ونضع فيه القيمة الاتجاهية للفترة الأولى، وباقى القيم الاتجاهية تأتى عن طريق إضافة قيمة (بً) للقيمة الاتجاهية الأولى.

- تنشئ عمود لنسبة القيم الفعلية الى القيم الاتجاهية ←(ص ÷ صً) × ١٠٠

٥- الرقم القياسى الموسمى لأى ربع :

$$= \frac{\text{مجـ نسب الربع فى كل السنوات}}{\text{عددها}}$$

٦- مجموع الأرقام القياسية الموسمية :

أما أن = ٤٠٠٪ ∴ لايلزم تعديلها.

أو ≠ ٤٠٠٪ ∴ يلزم تعديلها وذلك بضرب كل رقم قياسى × معامل التعديل

حيث أن :

$$\text{معامل التعديل} = \frac{٤٠٠}{\text{مجـ الأرقام القياسية الموسمية}}$$

٧- القيمة المتوقعة (التنبؤية) لأى ربع سنة : = القيمة الإتجاهيـــة × الرقـــم القياســـى الموسمى لهذا الربع.

مثال (١٥) : الآتى يمثل المبيعات الربع سنوية - خلال السنوات من ١٩٩٦ الى ١٩٩٨ .

الربع / السنة	الأول	الثانى	الثالث	الرابع
١٩٩٦	٢٨	٤٠	٣٦	٤٨
١٩٩٧	٣٦	٤٢	٤٠	٤٦
١٩٩٨	٣٢	٤٢	٤٢	٤٨

والمطلوب : بإستخدام طريقة نسبة القيم الفعلية الى القيمة الاتجاهية :

١- إيجاد الأرقام القياسية الموسمية.

٢- إيجاد القيم المتوقعة (التنبؤية) لكل ربع سنة فى سنة ١٩٩٩

الحـــل :

السنة	الربيع	ص	س	س ص	س٢
٩٦	الاول	٢٨	٥,٥-	١٥٤-	٣٠,٢٥
	الثانى	٤٠	٤,٥-	١٨٠-	٢٠,٢٥
	الثالث	٣٦	٣,٥-	١٢٦-	١٢,٢٥
	الرابع	٤٨	٢,٥-	١٢٠-	٦,٢٥
٩٧	الأول	٣٦	١,٥-	٥٤-	٢.٢٥
	الثانى	٤٢	٠,٥-	٢١-	٠,٢٥
	الثالث	٤٠	٠,٥	٢٠	٠,٢٥
	الرابع	٤٦	١,٥	٦٩	٢,٢٥
٩٨	الأول	٣٢	٢,٥	٨٠	٦,٢٥
	الثانى	٤٢	٣,٥	١٤٧	١٢,٢٥
	الثالث	٤٢	٤,٥	١٨٩	٢٠,٢٥
	الرابع	٤٨	٥,٥	٢٦٤	٣٠,٢٥
مجـ		٤٨٠	صفر	١١٤	١٤٣

١ – تقدير معادلة خط الاتجاه العام :

$$\hat{أ} = \frac{مجـ ص}{ن} = \frac{٤٨٠}{١٢} = \boxed{٤٠}$$

$$\hat{ب} = \frac{مجـ س ص}{مجـ س^٢} = \frac{١١٤}{١٤٣} = \boxed{٠,٨}$$

∴ معادلة خط الإتجاه العام هى :

$$\boxed{\hat{ص} = ٤٠ + ٠,٨ \text{ س}}$$

نقطة الأساس هى الربع الثانى / الربع الثالث لسنة ٩٧

$س = \frac{١}{٤}$ سنة.

٢– ايجاد القيمة الإتجاهية للربع الأول لسنة ٩٦ :

نعوض عن س = (–٥,٥) فى معادلة خط الإتجاه العام السابقة:

ويلاحظ أن (–٥,٥) هى قيمة (س) أمام الربع الاول لسنة ٩٦ فى الجدول السابق.

$\hat{ص}$ الربع الأول لسنة ٩٦ = ٤٠ + ٠,٨ (–٥,٥)

$= ٤٠ - ٤,٤ = \boxed{٣٥,٦}$

ويلاحظ أن باقى القيم الإتجاهية تأتى بإضافة قيم (ب = ٠,٨) الى (٣٥,٦) فمثلاً :

القيمة الإتجاهية للربع الثانى لسنة ٩٦ = ٣٥,٦ + ٠,٨ = ٣٦,٤

القيمة الإتجاهية للربع الثالث لسنة ٩٦ = ٣٦,٤ + ٠,٨ = ٣٧,٢

القيمة الإتجاهية للربع الرابع لسنة ٩٦ = ٣٧,٢ + ٠,٨ = ٣٨

القيمة الاتجاهية للربع الاول لسنة ٩٧ = ٣٨ + ٠,٨ = ٣٨,٨

وهكذا ...

السنة	الربع	القيمة الفعلية ص	القيم الإتجاهية صَ	نسبة القيمة الفعلية الى القيم الاتجاهية (ص ÷ صَ) × ١٠٠
٩٦	الاول	٢٨	٣٥,٦	٧٨,٦٥٪
	الثاني	٤٠	٣٦,٤	١٠٩,٨٩٪
	الثالث	٣٦	٣٧,٢	٩٦,٧٧٪
	الرابع	٤٨	٣٨	١٢٦,٣٢٪
٩٧	الأول	٣٦	٣٨,٨	٩٢,٧٨٪
	الثانى	٤٢	٣٩,٦	١٠٦,٦٪
	الثالث	٤٠	٤٠,٢	٩٩,٠١٪
	الرابع	٤٦	٤١	١١١,٦٥٪
٩٨	الأول	٣٢	٤١,٨	٧٦,١٩٪
	الثانى	٤٢	٤٢,٦	٩٨,١٣٪
	الثالث	٤٢	٤٣,٤	٩٦,١٣٪
	الرابع	٤٨	٤٤,٢	١٠٨,١١٪
مجـ		٤٨٠		

١ - الرقم القياسى الموسمى للربع الأول :

$$= \frac{٧٦,١٩ + ٩٢,٧٨ + ٧٨,٦٥}{٣} = \boxed{٨٢,٥٤٪}$$

أى ان المبيعات منخفضة فى الربع الاول بنسبة = ١٠٠٪ - ٨٢,٥٤٪ = ١٧,٤٦٪

٢ - الرقم القياسى الموسمى للربع الثانى :

$$= \frac{٩٨,٣٣ + ١٠٦,٠٦ + ١٠٩,٨٩}{٣} = \boxed{١٠٤,٦٩٪}$$

أى ان المبيعات مرتفعة فى الربع الثانى بنسبة = ١٠٤,٦٩٪ - ١٠٠ = ٤,٦٩٪

٣ - الرقم القياسى الموسمى للربع الثالث :

$$= \frac{٩٦,٣٣ + ٩٩,٠١ + ٩٦,٧٧}{٣} = \boxed{٩٧,٣٧٪}$$

أى ان المبيعات منخفضة فى الربع الثالث بنسبة = ١٠٠ - ٩٧,٣٧ = ٢,٦٣٪

٤- الرقم القياسى الموسمى للربع الرابع :

$$= \frac{١٠٨,١١ + ١١١,٦٥ + ١٢٦,٣٢}{٣} = \boxed{١١٥,٣٦٪}$$

أى ان المبيعات مرتفعة فى الربع الرابع بنسبة= ١٥,٣٦٪

- ويلاحظ أن مجموع الأرقام القياسية الموسمية

= ٨٢,٥٤ ٪ + ١٠٤,٦٩ ٪ + ٩٧,٣٧٪ + ١١٥,٣٦٪

= ٣٩٩,٩٦ ٪ ≈ ٤٠٠٪

∴ لايلزم تعديل الأرقام القياسية السابقة ويمكن إعتبارها ممثلة للتغيرات الموسمية خلال السنة.

المطلوب الثانى : إيجاد القيمة المتوقعة أو التنبؤية لكل ربع فى سنة ١٩٩٩

١- إيجاد القيمة الإتجاهية لكل ربع لسنة ٩٩ :

معادلة خط الإتجاه العام = $\boxed{\text{ص = ٤٠ + ٠,٨ س}}$ بأساس الربع الثانى / الربع الثالث لسنة٩٧

القيمة الإتجاهية للربع الأول لسنة ٩٩ = ٤٠ + ٠,٨ (٦,٥) = ٤٥,٢

القيمة الإتجاهية للربع الثانى لسنة ٩٩ = ٤٠ + ٠,٨ (٧,٥) = ٤٦

القيمة الإتجاهية للربع الثالث لسنة ٩٩ = ٤٠ + ٠,٨ (٨,٥) = ٤٦,٨

القيمة الاتجاهية للربع الرابع لسنة ٩٩ = ٤٠ + ٠,٨ (٩,٥) = ٤٧,٦

٢- __القيمة المتوقعة لاى ربع :__

$\boxed{\text{= القيمة الاتجاهية × الرقم القياسى}}$

القيمة المتوقعة للربع الأول لسنة ٩٩ = ٤٥,٢× $\frac{٨٢,٥٤}{١٠٠}$ = ٣٧,٣٠٨

القيمة المتوقعة للربع الثانى لسنة ٩٩ = ٤٦ × $\frac{١٠٤,٦٩}{١٠٠}$ = ٤٨,١٥٧

القيمة المتوقعة للربع الثالث لسنة ٩٩ = ٤٦,٨ × $\frac{٩٧,٣٧}{١٠٠}$ = ٤٥,٥٦٩

القيمة المتوقعة للربع الرابع لسنة ٩٩ = ٤٧,٦ × $\frac{١١٥,٣٦}{١٠٠}$ = ٥٤,٩١١

مثال : (١٦) :

إذا كانت معادلة الإتجاه العام الربع السنوية هى :

صَ = ٥٠ + ٢ س بأساس الربع الثانى / الربع الثالث لسنة ٩٧

وكانت المبيعات منخفضة فى الربع الأول بنسبة ١٠٪، ومنخفضة فى الربع الثانى بنسبة ٥٪ ومرتفعة فى الربع الثالث بنسبة ١٢٪.

المطلوب : إيجاد القيم المتوقعة للمبيعات فى سنة = ٢٠٠٠

الحـــل : أولاً : إيجاد القيم الإتجاهية لمبيعات كل ربع فى سنة ٢٠٠٠

السنة	الربع	س
٩٧	الأول	-١,٥
	الثانى	-٠,٥
	الثالث	٠,٥
	الرابع	١,٥
٩٨	الأول	٢,٥
	الثانى	٣,٥
	الثالث	٤,٥
	الرابع	٥,٥
٩٩	الأول	٦,٥
	الثانى	٧,٥
	الثالث	٨,٥
	الرابع	٩,٥
٢٠٠٠	الأول	١٠,٥
	الثانى	١١,٥
	الثالث	١٢,٥
	الرابع	١٣,٥

معادلة الإتجاه العام : ص = ٥٠ + ٢س

القيمة الإتجاهية للربع الأول لسنة ٢٠٠٠ = ٥٠ + ٢ (١٠,٥) = ٧١

القيمة الإتجاهية للربع الثانى لسنة ٢٠٠٠ = ٥٠ + ٢ (١١,٥) = ٧٣

القيمة الإتجاهية للربع الثالث لسنة ٢٠٠٠ = ٥٠ + ٢ (١٢,٥) = ٧٥

القيمة الاتجاهية للربع الرابع لسنة ٢٠٠٠ = ٥٠ + ٢ (١٣,٥) = ٧٧

ثانياً : إيجاد الأرقام القياسية الموسمية :

١- حيث أن المبيعات منخفضة فى الربع الأول بنسبة ١٠٪

.: الرقم القياسى الموسمى للربع الاول = $\boxed{٩٠٪}$

٢- حيث أن المبيعات منخفضة فى الربع الثانى بنسبة ٥٪

.: الرقم القياسى الموسمى للربع الثانى = $\boxed{٩٥٪}$

٣- حيث أن المبيعات مرتفعة فى الربع الثالث بنسبة ١٢٪

.: الرقم القياسى الموسمى للربع الثالث = $\boxed{١١٢٪}$

٤- حيث أن مجموع الأرقام القياسية الموسمية = ٤٠٠٪

.: الرقم القياسى الموسمى للربع الرابع = ٤٠٠٪ - (٩٠٪ + ٩٥٪ + ١١٢٪)

$\boxed{١٠٣٪}$

__ثالثاً إيجاد القيم المتوقعة :__

القيمة المتوقعة لأى ربع = القيمة الإتجاهية × الرقم القياسى الموسمى لهذا الربع.

١- القيمة المتوقعة للربع الأول لسنة ٢٠٠٠ = ٧١× $\frac{٩٥}{١٠٠}$ = ٦٣,٩

٢- القيمة المتوقعة للربع الثانى لسنة ٢٠٠٠ = ٧٣ × $\frac{٩٠}{١٠٠}$ = ٦٩,٣٥

٣- القيمة المتوقعة للربع الثالث لسنة ٢٠٠٠ = ٧٥ × $\frac{١١٢}{١٠٠}$ = ٨٤

٤- القيمة المتوقعة للربع الرابع لسنة ٢٠٠٠ = ٧٧ × $\frac{١٠٣}{١٠٠}$ = ٧٩,٣١